

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**Projeto e Avaliação do Controlador Preditivo  
Generalizado Sujeito a Restrições via Métodos de  
Otimização de Pontos Interiores**

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE  
SANTA CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE  
EM ENGENHARIA ELÉTRICA

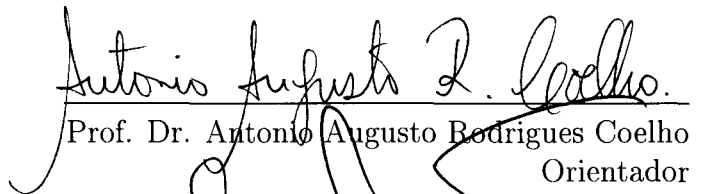
**Wellington Fernando Alves Pereira**

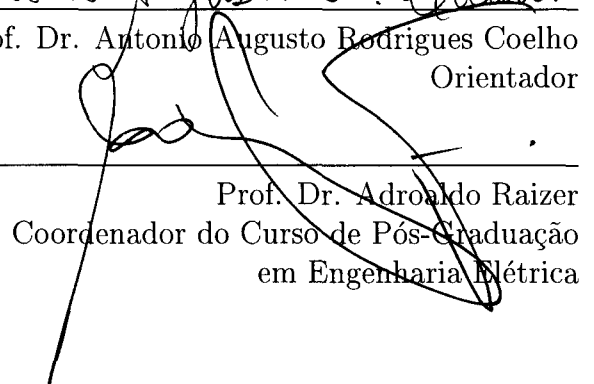
Florianópolis - SC, Brasil  
Maio de 1997

**Projeto e Avaliação do Controlador Preditivo  
Generalizado Sujeito a Restrições via  
Métodos de Otimização de Pontos Interiores**

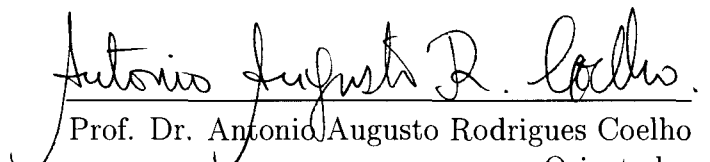
**Wellington Fernando Alves Pereira**


ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO  
TÍTULO DE  
**MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA**  
**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO**  
**CONTROLE, AUTOMAÇÃO E INFORMÁTICA INDUSTRIAL**  
E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS GRADUAÇÃO.

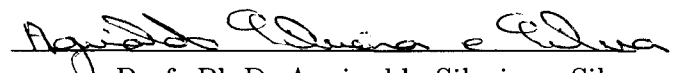
  
Prof. Dr. Antonio Augusto Rodrigues Coelho  
Orientador

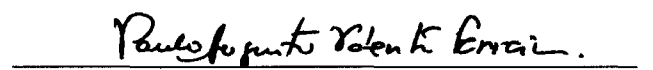
  
Prof. Dr. Adroaldo Raizer  
Coordenador do Curso de Pós-Graduação  
em Engenharia Elétrica

**BANCA EXAMINADORA**

  
Prof. Dr. Antonio Augusto Rodrigues Coelho  
Orientador  
EEL-UFSC

  
Prof. Ph.D. Roberto Salgado  
EEL-UFSC

  
Prof. Ph.D. Aguinaldo Silveira e Silva  
EEL-UFSC

  
Prof. Dr. Paulo Augusto V. Ferreira  
UNICAMP-FEE-DT

## *Odisséia*

*Caminhamos... E é longa a nossa viagem,  
Por terras férteis e por chãos maninhos...  
Temos no olhar a esplêndida coragem  
De quem não sabe todos os caminhos,*

*E, às vêzes, tem de conseguir passagem,  
Num dédalo de liana e de espinhos.  
Costeando uma torrente ou uma voragem,  
Vamos vencendo, altivos e sozinhos,*

*Rampas cruéis, planícies e desertos,  
Carregados de anseios e de danos...  
Por fim, do mal das ilusões libertos,*

*Chegamos à região das claridades...  
A esta altura, porém - altura de anos -  
A nossa glória é um álbum de saudade.*

*Dídio Augusto*

*Aos meus pais,  
Djalma e Mercinda.*

# Agradecimentos

A Deus, por estar presente em todos os momentos de minha vida.

Ao professor Antonio Augusto Rodrigues Coelho, pela orientação e amizade demonstradas durante a realização deste trabalho.

Aos professores Roberto Salgado, Paulo Augusto Valente Ferreira e Aguinaldo Silveira e Silva, membros da banca examinadora, pelos elogios e valiosas sugestões.

Aos colegas e professores do LCMI (Laboratório de Controle e Microinformática), que tornaram possível a realização deste trabalho.

Ao amigo Jézer Oliveira Pedrosa, pela amizade e companheirismo demonstrados nos últimos anos.

À minha irmã Rita de Cássia Alves Moreira e ao meu cunhado Welington Alves Moreira, por todo carinho e incentivo durante a realização deste trabalho.

Aos meus pais, Djalma Alves Pereira e Mercinda Sant'Anna Pereira, que sempre me deram apoio, amor e carinho em todos os momentos desta caminhada.

Um agradecimento especial a Nazaré Maria de Lima por todo seu amor.

Agradeço ainda a todos que, de alguma forma, colaboraram para a realização deste trabalho.

# Resumo

O controlador preditivo de horizonte estendido (“Long-Range Predictive Control - LRPC”) baseia-se na previsão do comportamento futuro do processo para o cálculo da lei de controle, através da otimização de uma função objetivo no domínio do tempo discreto. As previsões são realizadas com o modelo matemático do processo sobre um horizonte de tempo denominado horizonte de previsão.

Uma importante vantagem dos controladores preditivos é que sua estrutura particular é adequada para a inclusão, no objetivo de controle, de restrições de desigualdade, e estas restrições podem ser usadas para o ajuste da lei de controle, a fim de realizar um desempenho adequado para a planta controlada. Neste trabalho é avaliado o comportamento do Controlador Preditivo Generalizado via Programação Quadrática (GPC/QP) sujeito à restrições na amplitude do sinal de controle e saída, restrições na variação do sinal de controle e restrições no sobre-sinal.

Quando existem restrições, a solução do problema é obtida com a utilização de um método de otimização com restrições. Os métodos de otimização não-linear com restrições de desigualdade bem como os métodos para solução de problemas quadráticos são os mais apropriados devido a que, a função objetivo do controlador preditivo é uma função quadrática e as restrições do problema podem ser descritas na forma de restrições lineares e de desigualdade.

A desvantagem do GPC/QP em aplicações práticas é o elevado tempo computacional requerido para a realização “on-line” do cálculo da lei de controle, e devido a este fato pode ser inviável a utilização em sistemas com dinâmicas rápidas .

Neste contexto, este trabalho aborda três métodos de otimização, o Método das Direções Factíveis do Gradiente Projetado de Rosen (GPR), o Método de Ponto Interior Primal-Dual (PIPD) e o Método de Ponto Interior Corretor Predictor (PICP), assim como estratégias para reduzir o esforço computacional dos métodos de otimização são apresentadas.

# Abstract

The Long-Range Predictive Control is based upon the prediction of the future behavior of the system for calculating the control law by the optimization of a cost function in a discrete time domain. The predictions utilize the process mathematical model during a time interval, called prediction horizon.

An important advantage of the predictive controllers is that their particular structure is suitable for including inequality constraints in the control cost. Those constraints may be used for adjusting the control law, in order to obtain a desired performance for the controlled plant. This work analyses the behavior of the quadratic programming based on generalized predictive controller GPC/QP subjected to constraints acting on a process by amplitude limits in the control signal, slew rate limits of the control signal, limits on the output signal and limits on the overshoot signal.

When constraints are present, the solution is obtained by using a constrained optimization method. Non-linear optimization methods with inequality constraints, as well as methods for solving quadratic problems are the best choice, since the predictive controller cost function is a quadratic function and the problem constraints may be written as linear and inequality constraints.

A disadvantage of the GPC/QP in practical implementations is the hard computational effort necessary for calculating the control law, which is made on-line. That can render its application unfeasible for fast dynamic systems.

Then, this work analyses these optimization methods, the Feasible Direction - Gradient Projection Method of Rosen, the Primal-Dual Interior Point Method and the Prediction Corrector Interior Point Method, as strategies to reduce the optimization methods computational effort.





# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Controle Adaptativo ou Auto-Ajustável . . . . .	1
1.2	Controladores Preditivos de Horizonte Estendido . . . . .	2
1.2.1	Evolução das Técnicas . . . . .	5
1.2.2	Modelos Matemáticos de Projeto . . . . .	6
1.3	Problema das Restrições . . . . .	7
1.4	Motivação e Justificativa . . . . .	8
1.5	Objetivos e Organização do Trabalho . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Controle Preditivo Generalizado</b>	<b>15</b>
2.1	Introdução . . . . .	15
2.2	GPC SISO sem Restrições . . . . .	17
2.2.1	Modelo do Processo “CARIMA” . . . . .	18
2.2.2	Previsão Através das Identidades Polinomiais de “Diophantine” . .	18
2.2.3	Previsão Pelo Cálculo Iterativo do Modelo . . . . .	20
2.2.4	Lei de Controle Preditiva . . . . .	21
2.2.5	Parâmetros de Ajuste do GPC . . . . .	23
2.3	GPC SISO com Restrições . . . . .	24
2.3.1	Abordagem via Programação Quadrática . . . . .	24

2.4	Conclusão . . . . .	26
3	<b>Restrições</b>	<b>28</b>
3.1	Introdução . . . . .	28
3.2	Matriz de Restrições . . . . .	30
3.2.1	Restrições na Amplitude do Sinal de Controle . . . . .	30
3.2.2	Restrições na Variação do Sinal de Controle . . . . .	31
3.2.3	Restrições na Amplitude do Sinal de Saída . . . . .	32
3.2.4	Restrições no Sobre-sinal . . . . .	33
3.2.5	Exemplos Ilustrativos . . . . .	35
3.3	Conclusão . . . . .	43
4	<b>Eficiência Numérica dos Métodos de Otimização</b>	<b>45</b>
4.1	Introdução . . . . .	45
4.2	Método das Direções Factivéis . . . . .	46
4.2.1	Método do Gradiente Projetado de Rosen (GPR) . . . . .	46
4.3	Método do Ponto Interior . . . . .	48
4.3.1	Formulação Matemática do Método Primal-Dual . . . . .	48
4.3.2	Solução do Problema GPC QP pelo Método Ponto Interior Primal-Dual . . . . .	50
4.3.3	Redução do Sistema Linear do Método de Pontos Interiores Primal-Dual . . . . .	52
4.3.4	Solução do Problema GPC QP pelo Método do Ponto Interior Corretor Predictor . . . . .	54
4.4	Critérios de Convergência . . . . .	56
4.5	Condições de Otimalidade de Segunda Ordem . . . . .	56
4.6	Comparação entre os Métodos de Otimização . . . . .	57

4.6.1	Esforço Computacional dos Métodos de Otimização . . . . .	58
4.6.2	Processo de Inicialização dos Algoritmos de Pontos Interiores . . . . .	59
4.6.3	Comparação dos Métodos de Pontos Interiores Utilizando a Matriz Reduzida e a Matriz Completa . . . . .	61
4.6.4	Influência do Critério de Convergência no Desempenho do GPC . . . . .	62
4.7	Conclusão . . . . .	67
5	<b>Redução do Espaço de Restrições</b>	<b>69</b>
5.1	Introdução . . . . .	69
5.2	Estratégia para a Eliminação de Restrições Redundantes . . . . .	69
5.3	Conclusão . . . . .	74
6	<b>Conclusões e Sugestões para Estudos Futuros</b>	<b>76</b>
6.1	Conclusões . . . . .	76
6.2	Sugestões para Trabalhos Futuros . . . . .	78
	<b>Bibliografia</b>	<b>81</b>
A	<b>Interpretação Geométrica do GPC com Restrições</b>	<b>86</b>
A.1	Introdução . . . . .	86
A.1.1	Forma Geométrica da Função Custo do GPC . . . . .	86
A.1.2	Forma Geométrica da Região Factível . . . . .	87
A.1.3	Interpretação Geométrica da Solução Ótima . . . . .	90
A.2	Conclusão . . . . .	91



# Lista de Figuras

1.1	Sistema de controle auto-ajustável . . . . .	2
1.2	Conceito de controle preditivo . . . . .	3
1.3	Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada . . . . .	9
1.4	GPC sem restrições . . . . .	10
1.5	GPC com restrições na malha direta . . . . .	11
1.6	GPC com restrições no algoritmo . . . . .	11
3.1	Restrições no sinal de controle . . . . .	29
3.2	GPC sem restrições . . . . .	36
3.3	Restrições no incremento do controle (planta estável) . . . . .	36
3.4	Restrições no incremento e na amplitude do controle (planta estável) . . . . .	37
3.5	Comportamento do processo de fase não-mínima . . . . .	38
3.6	Restrições no incremento do controle (planta FNM) . . . . .	38
3.7	Restrições na amplitude da saída e no incremento do controle (planta FNM) . . . . .	39
3.8	Comportamento de sistemas oscilatório . . . . .	40
3.9	Restrições na derivada do sinal de saída (planta oscilatória) . . . . .	41
3.10	Restrições na derivada do sinal de saída e no incremento do controle (planta oscilatória) . . . . .	41
3.11	Restrições no sobre-sinal segundo a referência e restrições no incremento de controle (planta oscilatória) . . . . .	42

4.1 Comportamento do processo de fase não-mínima em relação as variáveis de parada ( $\mu \leq 1e - 5$  e  $\|grad\| \leq 1e - 7$ ) . . . . . 64

4.2 Comportamento do processo de fase não-mínima em relação as variáveis de parada ( $\mu \leq 1e - 5$  e  $\|grad\| \leq 1$ ) . . . . . 64

4.3 Comportamento do processo instável em relação as variáveis de parada ( $\mu \leq 1e - 5$  e  $\|grad\| \leq 1e - 5$ ) . . . . . 65

4.4 Comportamento do processo instável em relação as variáveis de parada ( $\mu \leq 1e - 5$  e  $\|grad\| \leq 1$ ) . . . . . 65

5.1 Politopo mínimo . . . . . 71

5.2 Procedimento para ativação da estratégia de eliminação de restrições . . . 72

A.1 Região factível das restrições de variação . . . . . 88

A.2 Região factível das restrições de amplitude . . . . . 89

A.3 Região factível das restrições de variação e amplitude . . . . . 90

A.4 Solução ótima da função custo restrita . . . . . 91



# Lista de Tabelas

1.1	Principais características dos controladores LRPC . . . . .	5
4.1	Esforço computacional do método GPR . . . . .	59
4.2	Esforço computacional do método PIPD . . . . .	59
4.3	Esforço computacional do método PICP . . . . .	59
4.4	Escolha inicial do parâmetro barreira - PIPD . . . . .	60
4.5	Escolha inicial do parâmetro barreira - PICP . . . . .	61
4.6	Comparação dos métodos de pontos interiores utilizando a matriz reduzida e a matriz completa - PIPD . . . . .	61
4.7	Comparação dos métodos de pontos interiores utilizando a matriz reduzida e a matriz completa - PICP . . . . .	62
4.8	Influência das variáveis de parada no esforço computacional dos métodos de otimização . . . . .	66
5.1	Resultados comparativos da eliminação de restrições - GPR . . . . .	73
5.2	Resultados comparativos da eliminação de restrições - PIPD . . . . .	73
5.3	Resultados comparativos da eliminação de restrições - PICP . . . . .	73





# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Controle Adaptativo ou Auto-Ajustável

Controle adaptativo é um termo genérico que se refere a sistemas de controle que ajustam automaticamente os parâmetros do controlador para compensar mudanças no processo ou no ambiente. Os sistemas de controle adaptativo oferecem uma abordagem com procedimentos flexíveis para tratamento de incertezas, características não-lineares e processos variantes no tempo. Consequentemente, esta estrutura de controle oferece benefícios para a solução de problemas de controle onde o processo é desconhecido e (ou) muda de maneira não-previsível. O controle adaptativo tem sido um tema dominante de pesquisa de técnicas avançadas na área de controle de processos [1],[8],[52].

Conforme ilustra a fig.(1.1), os sistemas de controle auto-ajustáveis incluem duas atividades básicas: estimação de parâmetros e projeto do controlador. Uma variedade de métodos de projeto de controladores têm sido utilizada, incluindo-se os baseados em funções custo quadráticas, alocação de pólos, técnicas LQG (“Linear Quadratic Gaussian”), etc... [1],[2],[11],[12],[13]. A estratégia de controle auto-ajustável divide-se em duas classes, isto é

- (i) Métodos de projeto de controle indireto (ou explícito)
- (ii) Métodos de projeto de controle direto (ou implícito)

No método indireto, os parâmetros da planta são identificados “*on-line*” e, baseado no modelo estimado, os parâmetros do controlador são sintonizados.

No método direto, o modelo da planta é re-parametrizado em termos dos parâmetros do controlador. Isto permite que os parâmetros do controlador sejam estimados diretamente. A parametrização é possível usando a técnica de variância mínima ou a técnica do modelo referência [1].

Vários sistemas de controle auto-ajustáveis estão comercialmente disponíveis no mercado, sendo que, uma grande variedade destes controladores têm sido desenvolvidos para aplicações específicas, tal como, controle de temperatura, controle de nível, máquinas de papel e outros. Por exemplo, a AccuRay Corporation desenvolveu uma nova máquina de corte de papel que têm sido implementada sobre mais de 70 máquinas de papel [10],[52].

A estrutura da estratégia auto-ajustável é ilustrada na fig.(1.1).

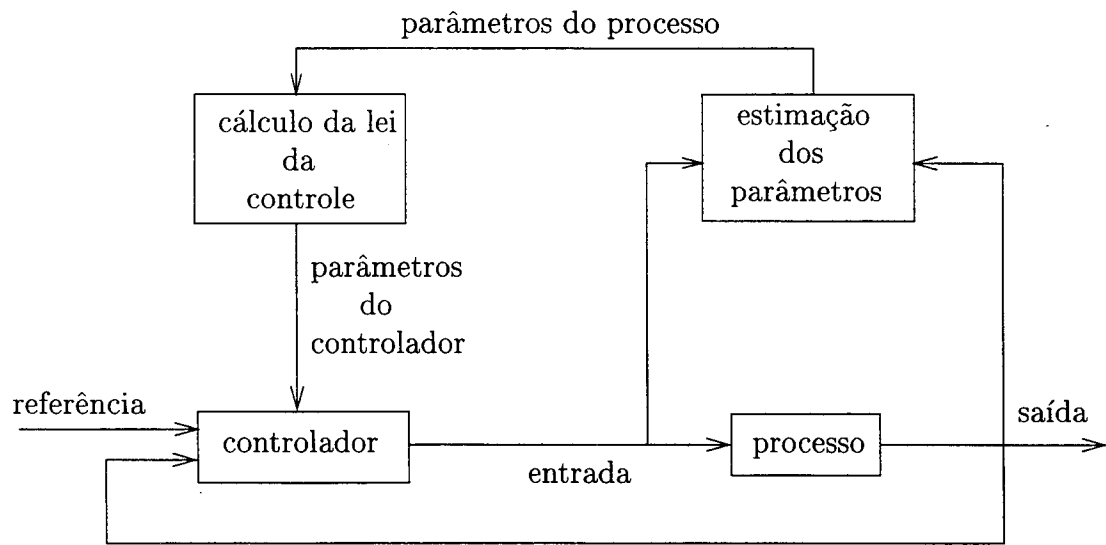


Figura 1.1: Sistema de controle auto-ajustável

## 1.2 Controladores Preditivos de Horizonte Estendido

Ao final dos anos 50, a compensação do atraso de transporte é fornecida pelos controladores convencionais de parâmetros fixos, sendo o mais popular o algoritmo de controle Preditor de Smith [55]. No início dos anos 70 surge o Regulador de Variância Mínima (MV) [2] e depois o Controlador de Variância Mínima Generalizada (GMV) [11],[12]. Estes controladores utilizam a estrutura de controle auto-ajustável e são baseados na previsão a  $k$  passos à frente da saída, onde  $k$  é o atraso de transporte do processo. Apesar da popularidade destes procedimentos de projeto de controle e com utilização na indústria, estes controladores não proporcionam um comportamento dinâmico adequado em malha fechada se o processo controlado apresenta determinadas complexidades, tais como :

- o atraso é incorretamente estimado ou variante no tempo;
- o sistema é de fase não-mínima.

Duas concepções alternativas de controle são capazes de superar os problemas mencionados, quais seja “Alocação de Pólos” e “Previsão com Horizonte Estendido”. A

estratégia de controle por alocação de pólos não é baseada em uma estratégia de controle tipo cancelamento de zero, logo é capaz de tratar sistemas com atraso de transporte e de fase não-mínima [3],[59].

A segunda alternativa de controle é o controlador preditivo de horizonte estendido ("Long-Range Predictive Control - LRPC"), desenvolvido por pesquisadores na França e Estados Unidos no final dos anos 70 e baseia-se na previsão do comportamento futuro do processo para o cálculo da lei de controle. As previsões são feitas utilizando-se o modelo do processo sobre um horizonte de tempo denominado horizonte de previsão ( $H_p$ ). Onde  $W$  é o sinal de referência,  $Y$  é o sinal de saída e  $u$  é o sinal de controle. O conceito destes controladores é ilustrado pela fig.(1.2).

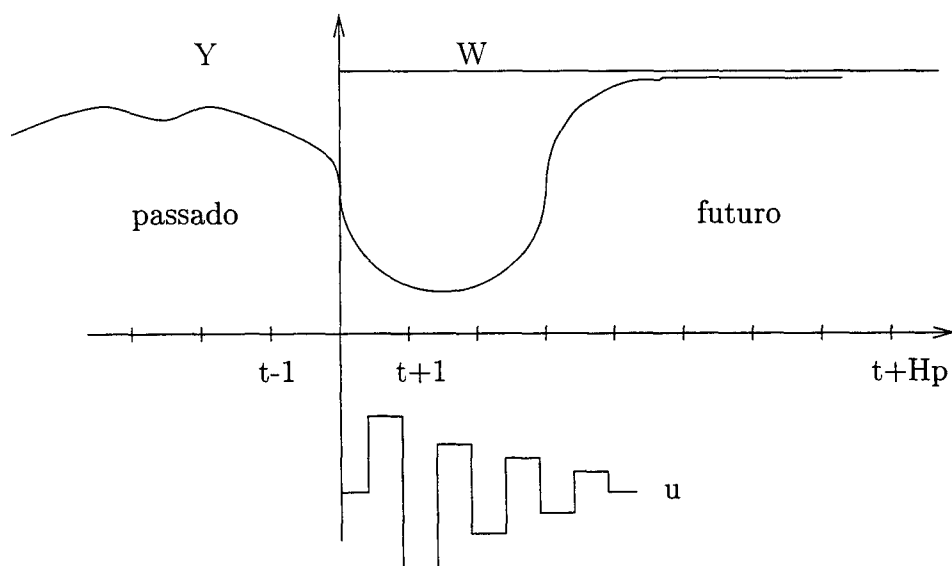


Figura 1.2: Conceito de controle preditivo

As características do controle preditivo são :

- (i) aplicável a processos de fase não-mínima e instável em malha aberta;
- (ii) as propriedades de rastreamento e estabilidade não são afetadas na presença do atraso de transporte variante ou desconhecido;
- (iii) trata aplicações monovariáveis e multivariáveis com ou sem restrições sobre as variáveis controlada e de controle;
- (iv) proporciona erro em regime nulo entre a referência e a variável do processo.

A literatura apresenta diversos tipos de controladores baseados no conceito de LRPC, como por exemplo :

- “Extended Horizon Adaptive Control” (EHAC) [20],[62]
- “Extended Prediction Self-Adaptive Control” (ÉPSAC) [20]
- “Dynamic Matrix Control” (DMC) [18],[20]
- “Generalized Predictive Control” (GPC) [14]
- “Model Algorithmic Control” (MAC) [51]
- “Multipredictor Receding Horizon Adaptive Control” (MURHAC) [29],[34]
- “Multistep Multivariable Adaptive Control” (MUSMAR) [15],[42]
- “Predictive Control Algorithmic” (PCA) [7],[56]
- “Optimum Control Synthesis” (OCS) [29],[49]

Os diversos controladores preditivos com horizonte estendido diferenciam-se de acordo com o modelo do processo, o preditor, o critério quadrático a ser otimizado e as restrições sobre os controles futuros.

A estratégia de controle preditivo encontra aplicação em sistemas auto-ajustáveis e, pelo adequado comportamento em malha fechada, proporciona a implementação em processos industriais [21],[20],[29],[56]. As características dos principais controladores de horizonte estendido podem ser observadas na tabela(1.1).

Os métodos de controle preditivo de horizonte estendido (LRPC) são caracterizados por:

- (i) Em cada “ instante de tempo atual  $t$  ” a previsão da saída do processo sobre um horizonte de tempo estendido (maior que o atraso de transporte do processo) é realizado. Esta previsão é realizada implicitamente ou explicitamente no algoritmo de controle, baseada no modelo matemático da dinâmica do processo e é função do cenário futuro de controle. Na fig.(1.2), o cenário de controle futuro é apresentado como sendo constante sobre o horizonte de previsão. Isto é realizado para simplificar e não representa uma restrição;
- (ii) Para os vários cenários de controle propostos, a estratégia é selecionada para levar a saída passada do processo prevista para a referência na melhor maneira possível de acordo com o objetivo de controle especificado;
- (iii) O controle candidato resultante é aplicado como uma ação de controle, isto é, como a real entrada do processo, mas somente no presente momento. No próximo instante de amostragem todo procedimento é repetido, conduzindo para uma ação de controle atualizada com correções baseadas nas últimas medidas (estratégia de horizonte curto).

	Modelo do Processo	Perturbação	Ordem do Modelo	Número de Parâmetros	Função Custo
MAC	Resposta ao Impulso	-	-	$N$	$\sum_{j=1}^{N_2} \{ [y(t+j) - w(t+j)]^2 + \lambda \Delta u^2(t+j-1) \}$
DMC	Resposta ao Degrau	-	-	$N$	$\sum_{j=1}^{N_2} [y(t+j) - w(t+j)]^2$
EHAC	Modelo CARMA <sup>1</sup>	-	$na, nb$	$na + nb + 1$	$\sum_{j=0}^{N_2-N_1} \Delta u^2(t+j)$
EPSAC	Modelo CARIMA <sup>2</sup>	$C\delta(t) \setminus \Delta$	$na, nb$	$na + nb + nc + 1$	$\sum_{j=d}^{N_2} \lambda [w(t+j) - P(q^{-1})y(t+j t)]^2$
GPC	Modelo CARIMA	$C\delta(t) \setminus \Delta$	$na, nb, nc$	$na + nb + nc + 1$	$\sum_{j=N_1}^{N_2} [w(t+j) - P(q^{-1})y(t+j t)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda \Delta u^2(t+j-1)$

Tabela 1.1: Principais características dos controladores LRPC

Os algoritmos de controle preditivos, com auxílio de um método de estimação, podem ser implementados de forma adaptativa, isto é, como controladores adaptativos diretos ou indiretos [1]. A maioria dos controladores adaptativos estão implementados na forma indireta, pois os controladores adaptativos diretos são mais difíceis de serem implementados devido a dificuldade para obter a previsão da saída. O GPC é exemplo de um controlador preditivo adaptativo indireto.

1.2.1 Evolução das Técnicas

O primeiro algoritmo de controle preditivo desenvolvido foi o MPHIC (“Model Predictive Heuristic Control”) de J. Richalet em 1978, sendo aplicado a uma planta química, e que considerava restrições sobre as variáveis de entrada e saída. A estratégia de controle preditivo utiliza um critério quadrático que penaliza os desvios entre a previsão da saída e a trajetória de referência desejada. As previsões são obtidas a partir do modelo da

<sup>1</sup>CARMA - (“Controlled Auto-Regressive Moving Average”)  
<sup>2</sup>CARIMA - (“Controlled Auto-Regressive Integrated Moving Average”)

resposta ao impulso. A técnica MPHC está comercialmente disponível em um produto denominado IDCOM (“Identification-Command”) [51].

O método de De Keyser surgiu em 1979, mais tarde denominado como EPSAC (“Extended Prediction Self-Adaptive Control”). Em 1980, C. R. Cutler, desenvolve o DMC (“Dynamic Matrix Control”). Este algoritmo utiliza o modelo da resposta ao degrau para obter as previsões da saída do processo e apresenta um horizonte de controle futuro limitado de modo que, a partir deste instante de tempo, os controles são nulos. Esta hipótese é interpretada como uma restrição sobre a variável de controle e reduz o esforço computacional do algoritmo de controle [18] e [20]. Em 1984 surge o método de B. E. Ydstie, mais tarde denominado como EHAC (“Extended Horizon Adaptive Control”) e finalmente em 1987 surge o método de D. W. Clarke, denominado GPC (“Generalized Predictive Control”). Atualmente as linhas de pesquisas dos controladores preditivos caminham para a obtenção de propriedades de robustez e estabilidade [50], de técnicas de otimização não-linear mais eficientes em termos de tempo computacional que resolvam o problema de programação quadrática restrita e aplicações industriais [9],[25],[58] e [52].

### 1.2.2 Modelos Matemáticos de Projeto

Os modelos MPHC e DMC estão baseados em modelos matemáticos não-paramétricos (modelos obtidos via respostas ao impulso ou degrau) para previsão da saída do processo e aplicados somente em plantas estáveis em malha aberta. Embora existam técnicas simples para obter o modelo, o número relativamente grande de parâmetros no modelo do processo, inviabiliza a implementação adaptativa.

Outros controladores preditivos desenvolvidos na literatura e baseados agora em modelos paramétricos (processo representado pela função de transferência, onde caracterizam-se os pólos e zeros da planta em malha aberta e perturbação determinística ou estocástica), representam os processos de uma maneira simples e com menos parâmetros.

Os principais algoritmos LRCP baseados neste modelo são: MUSMAR de G. Menga e E. Mosca, 1979; EHAC de B. E. Ydstie, 1984; EPSAC de R. M. C. De Keyser, 1985; e o GPC de D. W. Clarke, 1987, que é uma extensão e evolução dos algoritmos de controle GMV, MPHC, DMC e EPSAC, controlando processos simples e complexos.

O Controlador Preditivo Generalizado utiliza uma identificação indireta do processo e minimiza uma função custo quadrática dos erros futuros previstos, para calcular o sinal de controle incremental. Desde o trabalho de D. W. Clarke [14], o GPC tem recebido grande atenção na literatura [15],[17],[30],[35],[39],[40],[43],[44],[50] e esta técnica de controle pode ser vista como uma extensão e uma evolução do controlador GMV [11]. Isto é realizado através do aumento do número de previsões, variando de uma previsão baseada no atraso de transporte para um horizonte de previsão da saída do GPC, como mostra C. Mohtadi em [43]. Com esta característica, o GPC apresenta desempenho robusto quando aplicado a processos com atraso desconhecido ou variante, que é o principal problema no projeto

do controlador GMV [14].

## 1.3 Problema das Restrições

O controle preditivo com restrições é de grande importância prática, em razão de que na maioria das situações experimentais o desempenho de controle alcançado é limitado pelas restrições do sistema de controle. A não inclusão destas restrições na lei de controle é danosa para o desempenho da malha de controle. O uso de restrições de desigualdade, contudo, oferece uma maneira natural de incluir informação sobre as limitações do processo no cálculo do controle. Isto permite que o desempenho obtido pelo controlador seja ótimo em todas condições de operação, levando a um funcionamento seguro da planta junto a processos limitados [8].

A importância das restrições é também reforçada pelo fato que, na prática, o ponto nominal ótimo da planta geralmente é determinado para satisfazer metas econômicas e ficar na interseção de certas restrições. Assim, no uso prático, obtêm-se fatores de segurança no projeto da lei de controle, de modo que a operação é sustentada fora das regiões críticas.

Um fator comum em problemas de controle prático é a presença de restrições devido a diferentes razões : limitações físicas, especificações de qualidade do produto, requerimentos de segurança, etc...

Como as restrições são tratadas? Técnicas de otimização com restrições constituem o procedimento clássico para tratar processos com restrições. A função objetivo de controle é na maioria das vezes quadrática, e portanto, o problema é formulado como um problema de programação quadrática (restrições lineares) ou mais geralmente como programação não-linear (restrições não-lineares).

O usuário final está disposto a negociar alguma perda de otimização para facilitar a aplicação e torná-la viável. O procedimento LRPC oferece diferentes modos para realizar este compromisso e isto é um fator essencial no sucesso industrial do LRPC.

As restrições físicas do processo, tal como saturação dos atuadores, podem ser incorporadas nos algoritmos LRPC. Para o GPC, as restrições físicas podem ser traduzidas como restrições no sinal de controle incremental e a função custo quadrática do algoritmo pode então estar sujeita à restrições. Isto assegura que o algoritmo de controle sempre proporciona um sinal de controle realizável fisicamente (se existir).



## 1.4 Motivação e Justificativa

Os controladores adaptativos têm se revelado uma solução eficaz para o controle de processos que apresentam variadas complexidades. As diferentes técnicas utilizadas para o projeto de algoritmos adaptativos, como por exemplo Modelo de Referência, Auto-Ajustável, Alocação de Pólos e Programação de Ganhos, não podem tratar simultaneamente diversas complexidades. O controle preditivo pode tratar simultaneamente tais complexidades como “atrasos e parâmetros variantes, mudança na ordem do modelo, fase não-mínima, sub- ou sobre-parametrização, erro de modelagem” e, assim, mostrando um desempenho superior sobre os controladores adaptativos.

Na prática os processos são muitas vezes não-lineares. A mais comum não-linearidade é a restrição na entrada do processo, ou equivalentemente, restrição na saída do controlador. As restrições podem ser divididas em duas categorias, restrições “hard” ou restrições “soft”. As restrições “hard” são aquelas em que qualquer instante de tempo nenhuma violação dos limites são permitidas e as restrições “soft” são aquelas em que pode existir temporariamente a violação dos limites para a satisfação de outro critério. Na maioria das vezes, as restrições “soft” podem ser levadas em conta no critério quadrático do GPC, isto é :

$$J(u, t) = E \left\{ \sum_{j=N_1}^{N_2} [w(t+j) - y(t+j)]^2 + \lambda \sum_{j=1}^{N_u} [\Delta u(t+j-1)]^2 \right\} \quad (1.1)$$

Por exemplo, suponha que a saída do controlador deve ser mantida entre um limite superior e inferior e esta restrição é considerada como uma restrição “soft”, isto é, uma violação temporária desta restrição é permitida se esta é requerida, por exemplo, para forçar que a saída do processo volte para o conjunto de pontos após uma mudança de carga ter ocorrido. O fator peso  $\lambda$  da equação (1.1) pode ser selecionado tal que a restrição seja satisfeita na maioria do tempo da experimentação.

Ao contrário das restrições “soft”, as restrições “hard” devem ser levadas em conta explicitamente quando minimiza-se a função custo (1.1) e, como este resultado no problema de minimização restrita deve ser resolvido a cada amostra, é importante ter um método de otimização que resolva este problema eficientemente. Os controladores preditivos podem tratar restrições “hard” de um modo natural e sistemático.

A mais freqüente das restrições em operação são as restrições de amplitude. A saída do controlador é limitada entre dois valores : o limite superior ( $u_{max}$ ) e o limite inferior ( $u_{min}$ ) :

$$u_{min} \leq u(t) \leq u_{max} \quad u_{min} \leq u_{m\acute{a}x} \quad (1.2)$$

Outro tipo de restrição, que aparece menos freqüentemente na prática, é a restrição na

variação da saída do controlador. Agora, a mudança da saída do controlador por amostra é limitada entre dois valores :

$$\Delta u_{min} \leq \Delta u(t) \leq \Delta u_{máx} \quad \Delta u_{min} < 0 \text{ e } \Delta u_{máx} > 0 \quad (1.3)$$

onde  $\Delta u_{min}$  e  $\Delta u_{máx}$  são os limites inferior e superior da restrição de variação do controle, respectivamente. As restrições de amplitude e variação do controle estão, por exemplo, presente na máquina de curso (direção) de um navio : o ângulo do leme é limitado entre, mais ou menos 30 graus enquanto a velocidade do leme é limitada entre, mais ou menos 10 graus/segundo [8].

Uma maneira de garantir que a saída do controlador satisfaça as restrições (1.2) e (1.3) é reduzindo a saída calculada do controlador usando :

$$u^*(t) = \max[\min(u(t), u_{máx}(t), \Delta u_{máx}(t) + u(t-1)), u_{min}(t), \Delta u_{min}(t) + u(t-1)] \quad (1.4)$$

onde  $u^*(t)$  é a saída do controlador restrita que pode ser utilizada para controlar o processo. De acordo com a equação (1.4), um elemento não-linear é introduzido no sistema de controle em malha fechada, como é ilustrado na figura (1.3), na existência de somente restrições de amplitude. A influência de tal elemento na estabilidade e desempenho do sistema em malha fechada pode ser inadequado, e isto é ilustrado no exemplo (1.1):

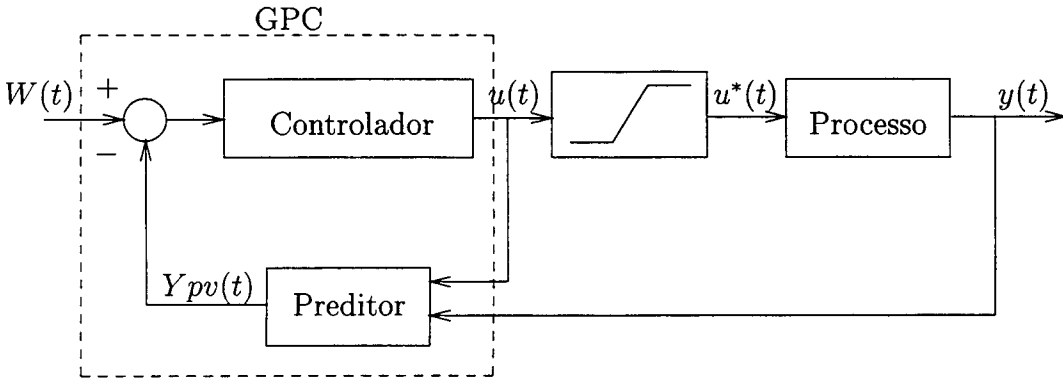


Figura 1.3: Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada

**Exemplo 1.1** - Controle de um processo na presença de restrições de amplitude: considere um processo de segunda ordem representado por

$$H(s) = \frac{5}{(4s + 1)(5s + 1)} \quad (1.5)$$

e o controlador sintonizado com  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 6$ ,  $N_u = 2$ ,  $\lambda = 0$ ,  $u_{m\acute{a}x} = \infty$ ,  $\Delta u_{min} = \infty$ ,  $\Delta u_{m\acute{a}x} = \infty$  e período de amostragem  $T_s = 0.5s$ .

As restrições de variação e a restrição de amplitude superior em  $u(t)$  não são ativadas. A figura (1.4) ilustra o comportamento do processo quando não há restrições ( $u_{min} = -\infty$ ) e como esperado a saída do processo segue a referência sem sobre-elevação.

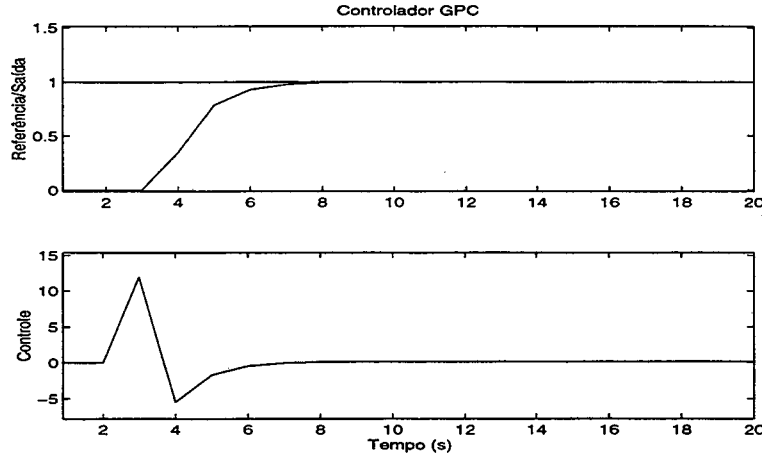


Figura 1.4: GPC sem restrições

A seguir, ilustra-se o comportamento do processo quando existe uma restrição na saída do controlador,  $u_{min} = -3$ . Então, sem levar em conta esta restrição quando projeta-se o controlador, observa-se que:

- Como em  $t$  a restrição ainda não está ativa, a mesma saída do controlador  $u(t)$  é gerada, como no caso em que a restrição não está presente. Isto obviamente resulta o mesmo na saída do processo em  $t=t+1$ . Em  $t=t+1$ , a saída do controlador  $u(t+1)$  viola a restrição e está limitada em  $u_{min}$ . Como um resultado, a saída do processo em  $t=t+2$  apresenta sobre-sinal na referência. Este sobre-sinal é detectado pela realimentação e uma ação de controle apropriada é produzida para direcionar a saída do processo para a referência. Portanto, não evita-se o sobre-sinal na dinâmica de malha fechada. A figura (1.5) mostra a resposta correspondente em malha fechada.

Da figura (1.5) observa-se que quando existem restrições na entrada do processo, um controlador que não considera as restrições pode produzir resultados indesejáveis, violando as especificações de desempenho impostas ao processo particular.

Para mostrar que se um controlador preditivo leva em conta as restrições do processo no cálculo da lei de controle, resultados adequados em malha fechada podem ser obtidos, considere o seguinte exemplo :

#### Exemplo 1.2 - Controle preditivo de um processo com restrições no controle.

Se o controlador usado no exemplo 1.1 é substituído por um controlador preditivo que

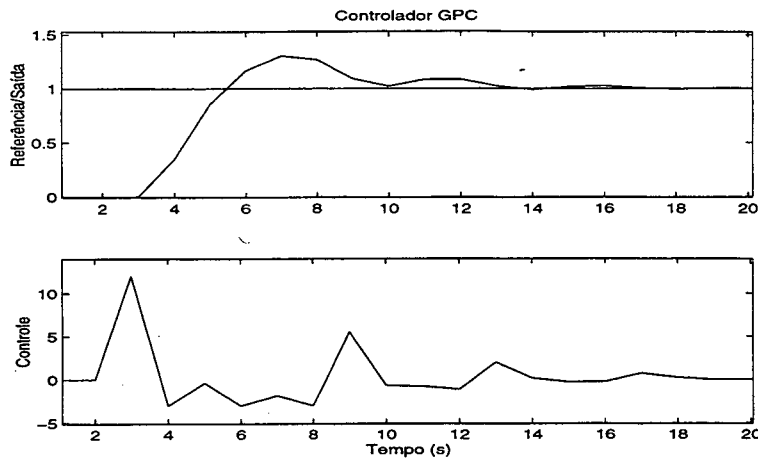


Figura 1.5: GPC com restrições na malha direta

admite a restrição de amplitude  $u_{min} = -3$  quando minimiza a função critério, então o controlador antecipa as restrições tornando-se ativo no futuro. O resultado é a diminuição do sobre-sinal. A simulação do exemplo (1.1) é repetida utilizando um controlador preditivo, que leva em conta a restrição na amplitude de  $u_{min} = -3$ . A figura (1.6) ilustra a resposta em malha fechada. Claramente, pela previsão da saída do processo, levando em conta o efeito das restrições no cálculo da lei de controle, o controlador pode antecipar as restrições. Isto resulta em uma resposta com um menor sobre-sinal.

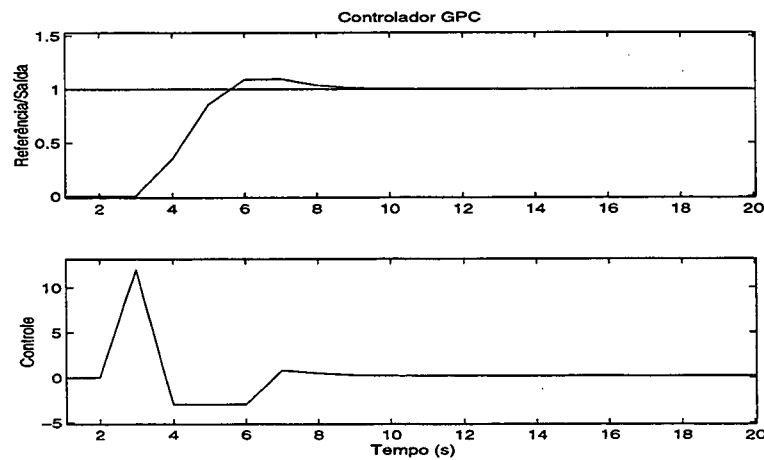


Figura 1.6: GPC com restrições no algoritmo

Quando existem restrições, a solução do problema é obtida através da utilização de um método de otimização com restrições. Os métodos de otimização não-lineares com restrições de desigualdade, como os métodos para resolução de problemas quadráticos são os mais apropriados. A função de custo do controlador preditivo é uma função quadrática e as restrições do problema podem ser descritas na forma de restrições lineares e de desigualdade [5].

Um dos principais problemas associados na implementação do controle preditivo é o

elevado tempo computacional requerido para a realização “on-line”. Esta característica não é crítica em sistemas com período de amostragem elevado, da ordem de segundos ou minutos. Esta é a razão do sucesso no controle de processos petroquímicos, porém, pode ser inviável em sistemas com dinâmicas rápidas. Neste contexto, são estudadas técnicas de otimização mais eficientes, assim como estratégias para a redução do esforço computacional dos algoritmos de otimização.

## 1.5 Objetivos e Organização do Trabalho

O objetivo deste trabalho é avaliar o Controlador Preditivo Generalizado (GPC) abordando os seguintes aspectos:

- Estudo do comportamento do GPC quando sujeito a restrições na amplitude do sinal de controle e saída, na variação do sinal de controle e no sobre-sinal;
- Eficiência numérica dos métodos de otimização através do estudo do comportamento do GPC quando sujeito aos diferentes métodos de otimização;
- Redução do espaço de restrições, com eliminação de restrições redundantes;
- Interpretação geométrica do GPC restrito : estudo da forma geométrica da função custo do GPC, estudo da forma geométrica da região factível e interpretação geométrica da solução ótima.

A organização do trabalho é a seguinte:

No **Capítulo 2** apresenta-se o projeto do algoritmo de controle GPC. A lei de controle preditiva é deduzida para o caso sem restrições e com restrições e, obtêm-se uma abordagem via programação quadrática.

No **Capítulo 3** apresentam-se as restrições do sistema descritas na forma de uma desigualdade matricial.

No **Capítulo 4** analisa-se a eficiência numérica dos métodos de otimização. Os métodos avaliados são: o Método das Direções Factíveis do Gradiente Projetado de Rosen (GPR); o Método do Ponto Interior Primal-Dual Puro; o Método do Ponto Interior Corretor Predictor. Comparam-se os métodos de otimização na implementação do GPC.

No **Capítulo 5** apresenta-se uma estratégia para reduzir o esforço computacional, com a eliminação de restrições redundantes.

No **Capítulo 6** encontram-se as conclusões.

No **Apêndice A** realiza-se uma interpretação geométrica do GPC restrito, quanto a forma geométrica da função custo do GPC e a forma geométrica da região factível e, faz-se uma interpretação geométrica da solução ótima.



## Capítulo 2

# Controle Preditivo Generalizado

### 2.1 Introdução

O antecessor do GPC é o bem conhecido controlador de Variância Mínima (MV), descrito em uma versão adaptativa por Åström em 1970 e, que forma a base do popular Regulador Auto-Ajustável de K. J. Åström and B. Wittenmark (1973). Este controlador é obtido minimizando-se (para um dado modelo linear entrada/saída) o seguinte critério:

$$J(u, t) = E\{[y(t + d) - w(t + d)]^2\} \quad (2.1)$$

onde  $y(t)$  é a saída do sistema,  $w(t)$  é o sinal de referência,  $E(.)$  é a esperança matemática e  $d$  é o atraso de transporte do processo. Este critério é minimizado no tempo  $t$  pela seleção do sinal de controle,  $u(t)$ . No instante de tempo  $t+1$  um novo problema é resolvido para calcular  $u(t+1)$ .

Como é bem conhecido, esta estratégia de controle é aplicada somente para sistemas de fase mínima (isto é, sistemas com zeros da planta estáveis). Para plantas de fase não-mínima a lei de controle apresenta um elevado esforço de controle para efetuar a ótima variância da saída, isto é, o controlador realiza seu desempenho através do cancelamento dos zeros da planta (incluindo os zeros instáveis), o que leva à perda de estabilidade interna do sistema realimentado. O procedimento sugerido para realizar a mesma estratégia e controlar sistemas de fase não-mínima é pela mudança da equação (2.1) através da inclusão de uma parcela que penaliza o sinal de controle. Isto conduz ao seguinte critério:

$$J(u, t) = E\{[y(t + d) - w(t + d)]^2 + \lambda u^2(t)\} \quad (2.2)$$

e implementa uma lei de controle ótima a um passo à frente denominada Controle de Variância Mínima Generalizada (GMV). Embora esta estratégia tenha o potencial de



produzir uma lei de controle estabilizante, isto ainda não é garantido para escolhas específicas de  $\lambda$ . Ainda que a planta seja perfeitamente conhecida, a análise de estabilidade do controlador requer a utilização das técnicas do lugar das raízes ou de robustez, com base na resposta em frequência [6] e [40].

Outra freqüente modificação no projeto do GMV é a declaração do problema de otimização não mais em termos de  $u(t)$ , mas em termos de  $\Delta u(t)$ , onde  $\Delta u(t)$  é a entrada de controle incremental do sistema, isto é

$$\begin{aligned}\Delta u(t) &= u(t) - u(t-1) \\ J(u, t) &= E\{[y(t+d) - w(t+d)]^2 + \lambda \Delta u^2(t)\}\end{aligned}\tag{2.3}$$

A razão para se usar entradas incrementais no critério é que (2.2) não admite erro estático nulo no caso de uma referência constante não-nula, exceto se a planta em malha aberta contém um integrador, que permita  $y(t)$  permanecer em um valor constante não-nulo com a entrada de controle sendo nula. Um aspecto do uso de  $\Delta u(t)$  na especificação da lei de controle é que limites explícitos em  $u(t)$  podem ser difíceis de obter. Observa-se que esta estratégia de controle aparece realmente como uma variante do regulador MV. A ponderação positiva  $\lambda$  é incluída para evitar magnitudes excessivas no sinal de controle.

Visto que o GMV muitas vezes é inadequado para o controle de alguns sistemas instáveis e de fase não-mínima, uma extensão adicional foi sugerida por D. W. Clarke *et al.* em 1987, e conduzindo ao GPC que minimiza o seguinte critério quadrático :

$$J(u, t) = E \left\{ \sum_{j=N_1}^{N_2} [w(t+j) - y(t+j)]^2 + \lambda \sum_{j=1}^{N_u} [\Delta u(t+j-1)]^2 \right\}\tag{2.4}$$

sujeito a:

$$\Delta u(t+j) = 0 \quad \text{para } j = N_u, \dots, N_2$$

Esta minimização produz  $\Delta u(t), \Delta u(t+1), \dots, \Delta u(t+N_u-1)$ , mas somente  $\Delta u(t)$  é aplicado no processo. No tempo  $t+1$  um novo problema de minimização é resolvido. Esta estratégia de implementação é conhecida como Controle de Horizonte Curto ("Receding Horizon Control").

A razão para a modificação da função objetivo no projeto do controle deve ser interpretada como um aperfeiçoamento das técnicas MV e GMV para proporcionar um desempenho adequado e estabilidade assintótica para uma ampla classe de plantas. A otimização é realizada para vários valores sucessivos de saídas futuras levando em conta várias ações de controle incremental futuras.

A inclusão de vários valores de controle futuro é feita com a finalidade de que longas observações do sinal de saída inpedem a formação de um controle ilimitado. A adição da

restrição no incremento de controle após um certo tempo está relacionado na implementação do controlador alcançar seu desempenho rapidamente, mas justificado no aspecto computacional da solução.

O que é notável no critério de controle dado pela equação (2.4) é a presença de um significativo nível de flexibilidade, suficiente para fazê-lo capaz de produzir efetivos controladores para diferentes famílias de plantas candidatas, pois o critério depende somente da especificação de três principais parâmetros de sintonia  $N_2$ ,  $N_u$ , e  $\lambda$ . O que deseja-se para as variáveis de sintonia é que sua influência sobre as propriedades dinâmicas da solução devem ser facilmente acessadas e, além disso, que existam normas na sua seleção, para efetuar certas propriedades em malha fechada [17] e [39].

O GPC é um dos mais recentes algoritmos de controle preditivo LRPC e combina importantes aspectos entre os quais :

- (i) O uso da previsão de horizonte estendido sobre um horizonte finito (de  $N_1$  para  $N_2$  amostras no futuro). Com isto aumenta-se a robustez do controlador na presença do não conhecimento ou do atraso de transporte variante, bem como plantas de fase não-mínima.
- (ii) O uso do modelo do processo “CARIMA” produz previsões em uma forma incremental. Isto introduz uma inerente ação integral no sistema de controle em malha fechada e realiza um controle “*offset-free*” para perturbações e mudanças de referência do tipo degrau.
- (iii) Após o suposto horizonte de controle  $N_u$ , todos incrementos de controle projetado são assumidos nulos. Pela restrição, o cálculo do sinal de controle reduz o esforço computacional significativamente e simplifica o controle de plantas de fase não-mínima.
- (iv) A ponderação do incremento de controle na função custo assegura a rejeição do “*offset-free*” de perturbações não-estacionárias como um resultado da inerente ação de controle integral.

## 2.2 GPC SISO sem Restrições

O desenvolvimento do GPC SISO começa inicialmente definindo-se um modelo apropriado para a previsão das saídas futuras do processo. O algoritmo é então estendido para apresentar as previsões futuras através das identidades polinomiais de “Diophantine” ou através do cálculo iterativo do modelo. Isto permite o cálculo dos sinais de controle futuro conhecendo-se os valores desejados das previsões futuras, que para o GPC é feito através da minimização de uma função custo quadrática, representada pelo quadrado da diferença entre as previsões futuras da saída e uma referência pré-especificada mais o quadrado dos incrementos de controle futuro.

### 2.2.1 Modelo do Processo “CARIMA”

O modelo do processo “CARIMA” (“Controlled Auto-Regressive Integrated Moving Average”) é definido como:

$$A(q^{-1}) y(t) = B(q^{-1}) u(t-1) + \frac{C(q^{-1}) \xi(t)}{\Delta} \quad (2.5)$$

onde  $y(t)$  e  $u(t-1)$  são a saída e a entrada do processo respectivamente;  $\Delta = 1 - q^{-1}$  é o operador diferença;  $\xi(t)$  é uma sequência de ruído randômico não-correlata com média zero; A, B e C são polinômios no operador atraso  $q^{-1}$ , isto é:

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1 q^{-1} + a_{na} q^{-na} \\ B(q^{-1}) &= b_0 + b_1 q^{-1} + b_{nb} q^{-nb} \\ C(q^{-1}) &= c_0 + c_1 q^{-1} + c_{nc} q^{-nc} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Se a planta tem um atraso de transporte não-nulo, os primeiros elementos do polinômio  $B(q^{-1})$  são nulos.

Existem muitas razões para a seleção deste tipo de estrutura de modelo; a essencialmente simples equação a diferenças linear é adequada para implementação discreta no computador, e facilmente manipulada em uma forma preditiva. A escolha particular do modelo “CARIMA” é feita na base que o termo do ruído  $(C(q^{-1}) \xi(t)/\Delta)$  é um modelo mais realista dos processos típicos com perturbação de carga e admite interpretação com degraus randômicos ou com “drifts”. Na prática, a principal justificativa para o uso deste modelo é a presença de dados incrementais no cálculo do controle devido a presença de um integrador no modelo [6].

### 2.2.2 Previsão Através das Identidades Polinomiais de “Diophantine”

Para resolver o problema proposto para minimização da equação (2.4), deve-se calcular um conjunto de previsões da saída  $y(t+j)$  a  $j$ -passos à frente, para  $j = N_1, \dots, N_2$  baseada na informação conhecida no instante de tempo  $t$  e nos valores futuros do incremento de controle. Essa previsão utiliza a seguinte identidade polinomial sobre o modelo da planta, isto é

$$C(q^{-1}) = E_j(q^{-1}) A(q^{-1}) \Delta + q^{-j} F_j(q^{-1}) \quad (2.7)$$

onde  $E_j(q^{-1})$  e  $F_j(q^{-1})$  são polinômios calculados a partir dos polinômios  $A(q^{-1})$ ,  $C(q^{-1})$  e do passo de previsão  $j$ , e as ordens destes polinômios são  $j-1$  e  $na$ , respectivamente.

Substituindo (2.7) em (2.5), obtém-se:

$$y(t+j) = \frac{B}{A} u(t+j-1) + E_j \xi(t+j) + \frac{F_j}{A\Delta} \xi(t) \quad (2.8)$$

Pelo modelo (2.5), tem-se que a perturbação  $\xi(t)$  pode ser escrita como sendo:

$$\xi(t) = \frac{A\Delta}{C} y(t) - \frac{B\Delta}{C} u(t-1) \quad (2.9)$$

Substituindo (2.9) em (2.8), obtém-se:

$$y(t+j) = \frac{F_j}{C} y(t) + E_j \xi(t+j) + \frac{E_j B}{C} \Delta u(t+j-1) \quad (2.10)$$

onde o termo  $E_j \xi(t+j)$  apresenta componentes de ruído que ocorrem após o instante  $t$  e, portanto, não são conhecidos através das medidas disponíveis no instante  $t$ . Então a melhor previsão da saída  $y(t+j)$ , dada pelas medidas conhecidas em tempo  $t$  é obtida eliminando-se a parcela  $E_j \xi(t+j)$  da equação (2.10). Assim:

$$y(t+j) = \frac{F_j}{C} y(t) + \frac{E_j B}{C} \Delta u(t+j-1) \quad (2.11)$$

Nesta expressão  $y(t+j)$  é função do valor do controle conhecido no tempo  $t$  e também da entrada de controle futura que deve ser calculada. Logo, utiliza-se uma segunda identidade polinomial para distinguir entre os valores de controle passados e futuros, isto é

$$E_j(q^{-1}) B(q^{-1}) = G_j(q^{-1}) C(q^{-1}) + q^{-j} \Gamma_j(q^{-1}) \quad (2.12)$$

que produz a seguinte expressão para a previsão:

$$y(t+j) = \frac{F_j}{C} y(t) + G_j \Delta u(t+j-1) + \frac{\Gamma_j}{C} \Delta u(t-1) \quad (2.13)$$

Considerando  $u^f(t)$  e  $y^f(t)$  as versões filtradas de  $\Delta u(t)$  e  $y(t)$ , de acordo com as equações (2.14) e (2.15)

$$u^f(t) = C^{-1}(q^{-1}) \Delta u(t) \quad (2.14)$$

$$y^f(t) = C^{-1}(q^{-1}) y(t) \quad (2.15)$$

é possível reescrever a equação (2.13) como

$$y(t+j) = G_j \Delta u(t+j-1) + F_j y^f(t) + \Gamma_j \Delta u^f(t-1) \quad (2.16)$$

ou equivalentemente

$$y(t+j) = G_j \Delta u(t+j-1) + y(t+j|t) \quad (2.17)$$

onde  $y(t+j|t)$  é a previsão da resposta livre da saída  $y(t+j)$  assumindo que o incremento de controle futuro após  $t-1$  é zero e o termo  $G_j \Delta u(t+j-1)$  é a previsão forçada da saída  $y(t+j)$ . Assim,

$$y(t+j|t) = F_j y^f(t) + \Gamma_j \Delta u^f(t-1) \quad (2.18)$$

Observando a equação (2.18) pode-se concluir que para se obter um conjunto de previsões futuras é necessário calcular os polinômios  $E_j$  e  $F_j$  da equação (2.7) para cada instante futuro  $t+j$ . Com esses valores e com os polinômios do modelo do processo obtêm-se a previsão da saída nos instantes  $t+j$  futuros.

### 2.2.3 Previsão Pelo Cálculo Iterativo do Modelo

Visto que o estado dinâmico do processo pode ser completamente definido no tempo  $t$  pela medida da saída  $y(t)$  e pelos vetores de estados:

$$\begin{aligned} &[y(t-1) \ y(t-2) \ \dots \ y(t-na)] \\ &[\Delta u(t-1) \ \Delta u(t-2) \ \dots \ \Delta u(t-nb-1)] \end{aligned} \quad (2.19)$$

as previsões das saídas futuras a  $j$ -passos à frente são obtidas pela equação do modelo do processo, dos vetores de estado conhecidos e da saída atual de acordo com :

$$\begin{aligned}
A(q^{-1}) \Delta y(t) &= B(q^{-1}) \Delta u(t-1) + C \xi(t) \\
y(t+1|t) &= -\tilde{a}_1 y(t) - \tilde{a}_2 y(t-1) + \dots - \tilde{a}_{n\tilde{a}} y(t-n\tilde{a}+1) + B(q^{-1}) \Delta u(t) \\
y(t+2|t) &= -\tilde{a}_1 y(t+1|t) - \tilde{a}_2 y(t) + \dots - \tilde{a}_{n\tilde{a}} y(t-n\tilde{a}+2) + B(q^{-1}) \Delta u(t+1) \\
y(t+3|t) &= -\tilde{a}_1 y(t+2|t) - \tilde{a}_2 y(t+1|t) + \dots - \tilde{a}_{n\tilde{a}} y(t-n\tilde{a}+3) + B(q^{-1}) \Delta u(t+2) \\
&\vdots \\
&\vdots \\
y(t+N_2|t) &= -\tilde{a}_1 y(t+N_2-1|t) - \tilde{a}_2 y(t+N_2-2|t) + \dots - \tilde{a}_{n\tilde{a}} y(t+N_2-n\tilde{a}|t) \\
&\quad + B(q^{-1}) \Delta u(t+N_2-1)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

onde  $\tilde{a}_1$ ,  $\tilde{a}_2$  e  $\tilde{a}_{n\tilde{a}}$  são os coeficientes do polinômio  $A(q^{-1}) \Delta$  e  $n\tilde{a}=na+1$ , sendo que,  $na$  é a ordem do polinômio  $A(q^{-1})$ .

## 2.2.4 Lei de Controle Preditiva

A equação (2.17) não somente permite o cálculo das previsões futuras dado os sinais de controle futuros, mas também permite o cálculo dos sinais de controle futuros conhecidos os valores desejados das previsões futuras. Para o GPC, este cálculo envolve a definição de uma função custo quadrática representando a diferença entre as previsões futuras da saída e um referência (trajetória) pré-especificado  $w(t+j)$ ,  $j=1,2,\dots,N_2$ :

$$J(u, t) = E \left\{ \sum_{j=N_1}^{N_2} [w(t+j) - y(t+j)]^2 + \lambda \sum_{j=1}^{N_u} [\Delta u(t+j-1)]^2 \right\} \tag{2.21}$$

onde  $N_u$  é o horizonte de controle,  $N_1$  é o horizonte de previsão mínimo da saída,  $N_2$  é o horizonte de previsão máximo da saída,  $\lambda$  é a ponderação sobre os incrementos de controle futuro e  $E$  é o operador esperança matemática.

A equação (2.21) minimiza o erro de previsão sobre um horizonte de previsões futuras, iniciando em  $N_1$  amostras no futuro e terminando após  $N_2$  amostras. As previsões futuras são calculadas usando a equação (2.17).

A derivação da lei de controle para a função custo (2.21) pode ser reescrita vetorialmente e a minimização quadrática agora torna-se um problema direto de algebra linear com:

$$J(u, t) = [G\tilde{u} + f - w]^T [G\tilde{u} + f - w] + \lambda \tilde{u}^T \tilde{u} \tag{2.22}$$

Minimizando a equação (2.22) em relação ao vetor de controle  $\tilde{u}$ , obtém-se:

$$\frac{\partial J_{GPC}}{\partial \tilde{u}} = 2 G^T G \tilde{u} + 2 G^T (f - w) + 2 \lambda \tilde{u} = 0 \quad (2.23)$$

ou

$$\tilde{u} = [G^T G + \lambda I]^{-1} G^T (w - f) \quad (2.24)$$

onde

$$w = [w(t + N_1) \ w(t + N_1 + 1) \ \dots \ w(t + N_2)]^T$$

$$f = [f(t + N_1) \ f(t + N_1 + 1) \ \dots \ f(t + N_2)]^T$$

$$\tilde{u} = [\Delta u(t) \ \Delta u(t + 1) \ \dots \ \Delta u(t + N_u - 1)]^T$$

sendo que  $\tilde{u}$  contém os incrementos futuros do sinal de controle que minimiza a função custo  $J_{GPC}$  da equação (2.21) e  $I$  é uma matriz identidade.

A resposta livre  $f(t + j)$  é calculada pela equação (2.18) e  $G$  é uma matriz de dimensão  $(N_2 - N_1 + 1) \times N_u$  dada por

$$G = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \dots & 0 \\ g_1 & g_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N_u-1} & g_{N_u-2} & \dots & g_0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ g_{N_2-1} & g_{N_2-2} & \dots & g_{N_2-N_u} \end{bmatrix}$$

onde cada  $g_i$  é o valor da resposta ao degrau do modelo do processo "CARIMA". Note que se a planta tem um atraso de transporte físico  $d \geq N_1$ , então as primeiras linhas  $(d + 1 - N_1)$  e as últimas colunas de  $G$  são nulas [46].

Para a implementação do GPC adaptativo é necessário inverter a matriz  $[G^T G + \lambda I]$  "on-line". A dimensão desta matriz é  $N_u \times N_u$  e quanto menor é o valor de  $N_u$ , menor é o esforço computacional do algoritmo, pela redução do número de colunas da matriz  $G$  e, conseqüentemente, pelo tempo de processamento para a inversão da matriz  $[G^T G + \lambda I]$ . O fator  $\lambda$ , além de ponderar o sinal de controle, permite o condicionamento da matriz  $[G^T G + \lambda I]$ , quando esta for singular.

### 2.2.5 Parâmetros de Ajuste do GPC

Os horizontes  $N_u$ ,  $N_2$ ,  $N_1$  e  $\lambda$  proporcionam uma flexibilidade de projeto do sistema em malha fechada, para satisfazer as especificações do usuário. Porém, como é tarefa complexa obter os pólos do sistema em malha fechada *à priori* em função dos parâmetros de projeto, torna-se necessária uma estratégia prática para a seleção destes parâmetros de projeto.

O horizonte de controle  $N_u$ , representa o número de incrementos de controle possivelmente não-nulos que o controlador está livre para selecionar e minimizar a função custo dada pela equação (2.21). A incorporação desta idéia no algoritmo resulta em duas imediatas vantagens:

- (i) Simplificação no cálculo do controle, isto é, após o intervalo de amostras futuras a  $N_u$ , os incrementos de controle projetados são nulos.
- (ii) Controle estável de processos de fase não-mínima; a suposição de um horizonte finito de controle representa uma restrição sobre o cálculo do controle que permite o controle estável de processos de fase não-mínima sem o uso de  $\lambda$  como requerido por alguns algoritmos de controle preditivo (por exemplo, o algoritmo GMV). O sinal de controle é impedido de aumentar descontrolavelmente e, assim, os modos instáveis são anulados [13]. Naturalmente, a restrição de usar  $\lambda$  não-nulo para o processo com atraso de transporte físico  $d \geq N_1$  não é necessária, para um  $N_u$  apropriado [45].  $N_u$  é um parâmetro de projeto, onde um valor grande implica em mais graus de liberdade e, assim, potencialmente um controle ativo enquanto que um valor menor implica relativamente em um controlador conservativo [15].

O horizonte de previsão máximo da saída  $N_2$  é usualmente escolhido de forma a ser maior que o tempo de subida do processo [30] e [43]. Para a maioria dos processos estáveis, a dinâmica em malha fechada torna-se mais rápida com a diminuição do horizonte  $N_2$ . Para processos instáveis, altos valores de  $N_2$  podem levar o sistema em malha fechada à instabilidade, pois os pólos de malha fechada tendem aos de malha aberta com o aumento de  $N_2$  [54].

O horizonte de previsão mínimo  $N_1$ , é normalmente assumido como 1, mas para processos com atraso de transporte mínimo conhecido,  $N_1$  pode ser selecionado igual ou maior do que o atraso de transporte mínimo, para evitar cálculos supérfluos. Também para processos de fase não-mínima,  $N_1$  pode ser selecionado maior do que 1, para o controlador ignorar o comportamento de fase não-mínima dos processos. O aumento de  $N_1$  diminui o esforço computacional do algoritmo [30].

A introdução da constante de ponderação  $\lambda$  diminui os níveis do sinal de controle e aumenta o sobre-sinal da saída do sistema. Isto por que, com valores diferentes de zero para  $\lambda$ , o sinal de controle passa a ter seus valores ponderados na função objetivo.



Em [47] encontra-se um estudo da variação dos parâmetros de projeto do GPC e desenvolve-se uma base de regras para sua escolha.

## 2.3 GPC SISO com Restrições

Minimizando-se a função custo  $J_{GPC}$  dada pela equação (2.21), obtêm-se os incrementos futuros ótimos do sinal de controle quando não existem restrições nas variáveis controlada e manipuladas. Caso existam, e o vetor  $\Delta u$  não as satisfaça, a solução do algoritmo, para o caso de restrições no sinal de controle, é simplesmente a limitação da parte excedente do sinal (técnica convencional).

O uso de limitantes no sinal de controle introduz um elemento não-linear no sistema em malha fechada. Nestes casos pode-se observar que, quando as restrições impostas pelo sistema são severas o sistema em malha fechada pode apresentar um desempenho indesejado, ou mesmo tornar-se instável.

Através do ajuste dos parâmetros de projeto, pode-se obter um comportamento em malha fechada de modo a satisfazer as restrições. Estes ajustes evitam que os sinais de controle e/ou saída ultrapassem os limites especificados, porém, afetam diretamente o comportamento do sistema em todos os instantes de tempo, tornando-o lento mesmo quando as restrições são satisfeitas.

A seguir, apresenta-se um algoritmo que diminui o esforço de controle e/ou o valor do sinal de saída, quando necessário, sem afetar o comportamento do sistema quando as restrições são satisfeitas.

### 2.3.1 Abordagem via Programação Quadrática

Esta abordagem baseia-se em reescrever a função custo do GPC na forma de um problema quadrático e utilizar para sua minimização um método de otimização não-linear com restrições, como é mostrado a seguir:

(i) A função custo  $J_{GPC}$ , na forma vetorial, é reescrita na seguinte forma

$$J(u, t) = [G\tilde{u} + f - w]^T [G\tilde{u} + f - w] + \lambda \tilde{u}^T \tilde{u} \quad (2.25)$$

$$J(u, t) = \tilde{u}^T [G^T G + \lambda I] \tilde{u} + 2 [f - w]^T G \tilde{u} + [f - w]^T [f - w] \quad (2.26)$$

a minimização da equação (2.25) em relação a  $\tilde{u}$  equivale a minimizar

$$J(u, t) = \frac{1}{2} \tilde{u}^T [G^T G + \lambda I] \tilde{u} + [f - w]^T G \tilde{u} \quad (2.27)$$

(ii) As restrições do problema são descritas como uma desigualdade do tipo

$$P \Delta u \leq q$$

onde P e q são determinados de acordo com os tipos de restrições presentes no problema.

(iii) Resolve-se o seguinte problema:

$$\begin{aligned} &\text{minimize } J(u, t) = \frac{1}{2} \tilde{u}^T [G^T G + \lambda I] \tilde{u} + [f - w]^T G \tilde{u} \\ &\text{sujeito a: } P \Delta u \leq q \end{aligned} \quad (2.28)$$

Existem vários métodos para solução deste problema quadrático clássico [5],[22],[23],[31],[32],[33],[48],[60]. Neste trabalho são utilizados o Método das Direções Factíveis do Gradiente Projetado de Rosen, o Método do Ponto Interior Primal Dual e o Método do Ponto Interior Corretor Predictor.

## 2.4 Conclusão

Uma das vantagens do GPC é que os limites no atuador e na variável do processo na prática podem ser considerados no projeto do controlador. Para considerar estas restrições uma modificação no algoritmo de controle GPC, com o objetivo de que este possa manipular restrições presentes no processo, foi apresentada. Assim, obteve-se um novo algoritmo que é resolvido através do uso de métodos de otimização para problemas quadráticos.



# Capítulo 3

## Restrições

### 3.1 Introdução

Uma característica comum em muitos problemas de controle prático é a presença de restrições. Algumas restrições presentes são: limitações de segurança (a pressão em um reator químico não deve ser maior do que algum limite); restrições físicas (uma válvula não pode ser aberta mais do que seu projeto permite); requisitos tecnológicos (a temperatura deve ser mantida dentro dos limites especificados); especificações de qualidade do produto final (o máximo de impurezas permitido), etc. Em aplicações práticas, o controlador deve ser projetado considerando estas especificações de operação. Caso contrário, a ação de controle aplicada que é fisicamente restrita, resulta em um desempenho pobre em malha fechada e pode levar a um comportamento indesejado.

Um aspecto positivo do GPC (assim como de todos os controladores preditivos) é que a estrutura do algoritmo básico é adequada para incluir restrições físicas no cálculo do controle. Portanto, o projetista de controle pode usar as restrições no ajuste da lei de controle, para realizar um desempenho adequado para a planta controlada.

Na prática, a maneira usual de implementar o GPC padrão é calcular  $u(t)$  como descrito no capítulo 2 e aplicá-lo ao processo. Se  $u(t)$  viola as restrições, então está saturado no limite superior ou inferior, pelo programa de controle ou pelo atuador. Se  $u(t+1), \dots, u(t+N_u)$  violam as restrições, nenhuma medida é tomada, pois na maioria dos casos estes sinais de controle não são aplicados ao processo.

Esta maneira de operação não garante que o ótimo seja obtido quando as restrições são violadas. A principal proposta do GPC, que é aplicar o sinal de controle adequado pela minimização da expressão (2.21), não é realizada.

Para ilustrar a violação das restrições, considere os casos de violações nas restrições mostradas na fig.(3.1) de um problema GPC com um horizonte de controle igual a dois.

A fig.(3.1a) ilustra o caso onde  $u_c > u_{max}$ . Neste caso a maneira normal de operação é aplicar  $u_{max}$  no processo no lugar de  $u_r$  onde o mínimo de  $J_{GPC}$  é atingido quando as restrições são consideradas. No caso mostrado na fig.(3.1b),  $u_c$  não viola as restrições, e é aplicado no sistema no lugar do sinal ótimo  $u_r$  que seria aplicado quando as restrições são levadas em consideração.

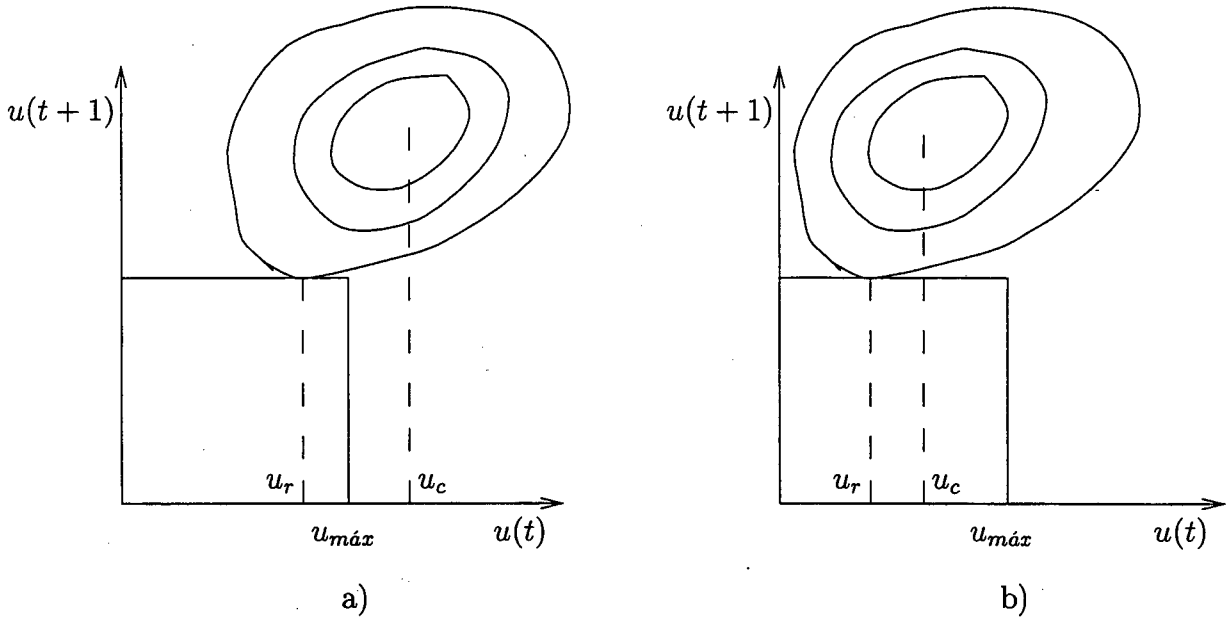


Figura 3.1: Restrições no sinal de controle

A consideração das restrições nas variáveis manipuladas em toda sua extensão, pode resultar em um desempenho pobre para o sistema de controle. Entretanto, a principal razão para o tratamento de restrições em uma maneira apropriada é que a violação dos limites nas variáveis controladas pode ser mais custosa e perigosa, pois pode causar dano ao equipamento e prejuízo na produção. Por exemplo, na maioria dos reatores a qualidade da produção requer que algumas das variáveis sejam mantidas nos limites especificados; a violação desses limites pode criar uma má qualidade do produto e em alguns casos a perda de toda a série da produção.

Diferentemente dos trabalhos de T. T. C. Tsang e D. W. Clarke em 1988, E. F. Camacho em 1993 e H. C. O. Gustavo em 1993, neste trabalho além das restrições na amplitude do sinal de controle, restrições na variação do sinal de controle e restrições na amplitude do sinal de saída, são formuladas e introduzidas no GPC duas estratégias diferentes para tratar o problema do sobre-sinal ("overshoot") [9],[25],[58].

## 3.2 Matriz de Restrições

No projeto do GPC admite-se um modelo linear para a planta. Consequentemente, toda entrada, estado ou saída futura pode ser expressa como uma combinação linear dos incrementos de controle futuros. Isto significa que toda restrição de desigualdade pode ser escrita na forma de:

$$P\Delta u \leq q \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \end{bmatrix} \Delta u \leq \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Cada conjunto de submatrizes acima representa um tipo de restrição. Por exemplo, em  $P_1\Delta u \leq q_1$  estão as restrições sobre a variação do sinal de controle. A seguir, descrevem-se as restrições que são consideradas na síntese da lei de controle e suas respectivas representações matriciais.

### 3.2.1 Restrições na Amplitude do Sinal de Controle

Cada controle futuro  $u(t+j-1)$ ,  $j=1,\dots,N_u$ , pode ser limitado. Introduzindo-se os limites de controle inferior e superior ( $u_{min}$  e  $u_{máx}$ ) e como

$$u(t+j-1) = u(t+j-2) + \Delta u(t+j-1) \quad (3.1)$$

pode-se escrever um conjunto dos seguintes intervalo das restrições

$$u_{min} - u(t+j-2) \leq \Delta u(t+j-1) \leq u_{máx} - u(t+j-2) \quad (3.2)$$

Na forma vetorial, as restrições da equação (3.2) podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned} (1, \dots, 1, 0, \dots, 0) \Delta u(t+j-1) &\leq u_{máx} - u(t-1) \\ (-1, \dots, -1, 0, \dots, 0) \Delta u(t+j-1) &\leq -u_{min} + u(t-1) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Assim,

$$\begin{aligned} L \Delta u(t+j-1) &\leq U_{máx} \\ -L \Delta u(t+j-1) &\leq -U_{min} \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde  $U_{min} = [u_{min}-u(t-1), \dots, u_{min}-u(t-1)]^T$ ,  $U_{máx} = [u_{máx}-u(t-1), \dots, u_{máx}-u(t-1)]^T$  e  $L$  é uma matriz triangular inferior  $N_u \times N_u$  com elementos unitários, isto é

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

A sub-matriz de restrições tem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \Delta u(t+1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta u(t+N_u) \\ \vdots \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} u_{máx} - u(t-1) \\ u_{máx} - u(t-1) \\ \vdots \\ u_{máx} - u(t-1) \\ \vdots \\ -u_{min} + u(t-1) \\ -u_{min} + u(t-1) \\ \vdots \\ -u_{min} + u(t-1) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

### 3.2.2 Restrições na Variação do Sinal de Controle

Neste caso, cada incremento futuro  $\Delta u(t+j-1)$ ,  $j = 1, \dots, N_u$  pode ser limitado por limites inferior e superior ( $\Delta u_{min}$  e  $\Delta u_{máx}$ ). Assim, tem-se um conjunto de intervalos de restrições da forma

$$\Delta u_{min} \leq \Delta u(t+j-1) \leq \Delta u_{máx} \quad (3.5)$$

Na forma vetorial, as restrições da equação (3.5) podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned} (0, \dots, 1, 0, \dots, 0) \Delta u(t+j-1) &\leq u_{máx} \\ (0, \dots, -1, 0, \dots, 0) \Delta u(t+j-1) &\leq -u_{min} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Assim,



$$\begin{aligned}
 I \Delta u(t+j-1) &\leq Du_{\max} \\
 -I \Delta u(t+j-1) &\leq -Du_{\min}
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

onde  $Du_{\min} = [\Delta u_{\min}, \dots, \Delta u_{\min}]^T$ ,  $Du_{\max} = [\Delta u_{\max}, \dots, \Delta u_{\max}]^T$  e  $I$  é uma matriz identidade  $N_u \times N_u$ .

A sub-matriz de restrições tem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 1 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\
 0 & 0 & \dots & 1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\
 -1 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & -1 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\
 0 & 0 & \dots & -1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \Delta u(t) \\
 \Delta u(t+1) \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \Delta u(t+N_u) \\
 \vdots
 \end{bmatrix}
 \leq
 \begin{bmatrix}
 \Delta u_{\max} \\
 \Delta u_{\max} \\
 \vdots \\
 \Delta u_{\max} \\
 \vdots \\
 -\Delta u_{\min} \\
 -\Delta u_{\min} \\
 \vdots \\
 -\Delta u_{\min} \\
 \vdots
 \end{bmatrix}$$

### 3.2.3 Restrições na Amplitude do Sinal de Saída

Muitas vezes deseja-se que a variável controlada siga uma trajetória dentro de uma faixa de interesse. Na indústria de alimentos, por exemplo, é usual requerer em algumas operações uma temperatura de contorno que deve ser seguida com uma tolerância especificada. Esta imposição de operação pode ser introduzida no sistema de controle forçando o comportamento da saída do sistema ser incluída em uma faixa próxima da trajetória com tolerâncias máximas e mínimas especificadas.

Se os limites inferior e superior ( $y_{\min}$  e  $y_{\max}$ ) existem na saída, pode-se escrever um conjunto de intervalo de restrições:

$$y_{\min} \leq y(t+j) \leq y_{\max} \quad j = N_1, \dots, N_2 \tag{3.8}$$

onde  $N_1$  e  $N_2$  são os horizontes de previsão inicial e final, respectivamente. Substituindo a previsão da saída  $y(t+j)$  pela equação (2.17), as restrições de saída da equação (3.8) podem ser reescritas na forma vetorial como :

$$\begin{aligned}
G \Delta u(t+j-1) &\leq y_{\max} - y(t+j|t) \\
-G \Delta u(t+j-1) &\leq -y_{\min} + y(t+j|t)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

onde  $y_{\min} = [y_{\min}, \dots, y_{\min}]^T$ ,  $y_{\max} = [y_{\max}, \dots, y_{\max}]^T$ ,  $G$  é uma matriz cujos elementos são obtidos pela resposta ao degrau e de dimensão  $(N_2 - N_1 + 1) \times N_u$  e  $y(t+j|t)$  é a previsão da resposta livre da saída  $y(t+j)$ .

A sub-matriz de restrições tem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} G \\ -G \end{bmatrix} \Delta u \leq \begin{bmatrix} y_{\max} - y(t+j|t) \\ -y_{\min} + y(t+j|t) \end{bmatrix}$$

### 3.2.4 Restrições no Sobre-sinal

Muitas vezes o sobre-sinal não é desejável quando controla-se plantas no mundo real. No caso dos manipuladores, por exemplo, um sobre-sinal pode produzir uma colisão com a peça que o manipulador está tentando segurar. Porém, o sobre-sinal pode ser evitado pela introdução de um tipo especial de restrição. Nesta subseção são apresentadas duas estratégias diferentes para tratar o problema do sobre-sinal. A primeira estratégia considera o sinal de referência, onde a saída  $y(t+j)$  deve sempre permanecer entre os limites inferior e superior do sinal de referência. A segunda estratégia trabalha com a taxa de variação da saída  $dy(t)/dt$ . A seguir, formulam-se as duas estratégias.

- Restrições no sobre-sinal a partir da referência

Dados os limites inferior e superior  $W_{\min}$  e  $W_{\max}$ , e considerando que a referência é mantida constante por um período suficientemente longo, a saída pode ser limitada por um conjunto de intervalo de restrições:

$$W_{\min} \leq y(t+j) \leq W_{\max} \tag{3.10}$$

No caso de uma referência constante, substituindo a previsão da saída  $y(t+j)$  pela equação (2.17), as restrições no sobre-sinal da equação (3.10) podem ser reescritas na forma vetorial como :

$$\begin{aligned}
G \Delta u(t+j-1) &\leq W_{\max} - y(t+j|t) \\
-G \Delta u(t+j-1) &\leq -W_{\min} + y(t+j|t)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

No caso de uma referência na forma de uma onda quadrada, as restrições no sobre-sinal da equação (3.10) são agora limitadas por dois conjuntos de intervalo de restrições, isto porque, na onda quadrada aparecem dois limites, um superior e outro inferior, onde para o limite superior da referência a saída pode ser limitada por :

$$W1_{min} \leq y(t+j) \leq W1_{máx} \quad (3.12)$$

e para o limite inferior da referência a saída pode ser limitada por :

$$W2_{min} \leq y(t+j) \leq W2_{máx} \quad (3.13)$$

Substituindo a previsão da saída  $y(t+j)$  pela equação (2.17), as restrições no sobre-sinal das equações 3.12 e 3.13 podem ser reescritas na forma vetorial como :

$$\begin{aligned} G \Delta u(t+j-1) &\leq W1_{máx} - y(t+j|t) \\ -G \Delta u(t+j-1) &\leq -W1_{min} + y(t+j|t) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} G \Delta u(t+j-1) &\leq W2_{máx} - y(t+j|t) \\ -G \Delta u(t+j-1) &\leq -W2_{min} + y(t+j|t) \end{aligned} \quad (3.15)$$

a sub-matriz de restrições tem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} G \\ -G \end{bmatrix} \Delta u \leq \begin{bmatrix} W_{máx} - y(t+j|t) \\ -W_{min} + y(t+j|t) \end{bmatrix}$$

- Restrições no sobre-sinal a partir da derivada da saída

Uma maneira alternativa de tratar o sobre-sinal é introduzir restrições na taxa de variação da saída  $dy(t)/dt$ , de forma que o conjunto do intervalo de restrições é dado por:

$$\delta_{min} \leq \frac{dy(t)}{dt} \leq \delta_{máx} \quad (3.16)$$

Utilizando a aproximação de primeira ordem de Taylor:

$$\frac{dy(t)}{dt} \simeq \frac{y(t+j) - y(t)}{j} \quad (3.17)$$

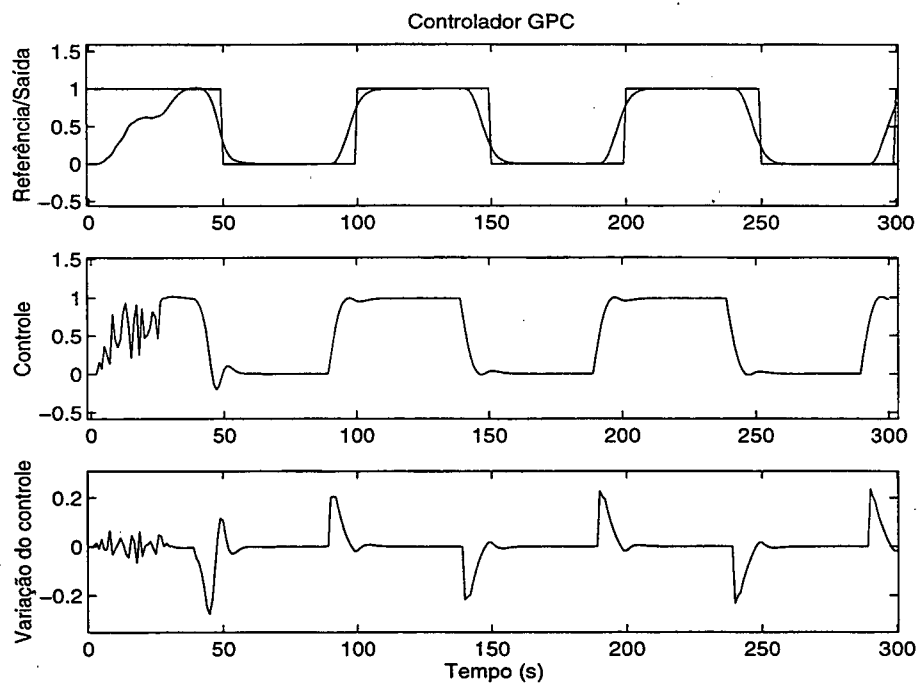


Figura 3.2: GPC sem restrições

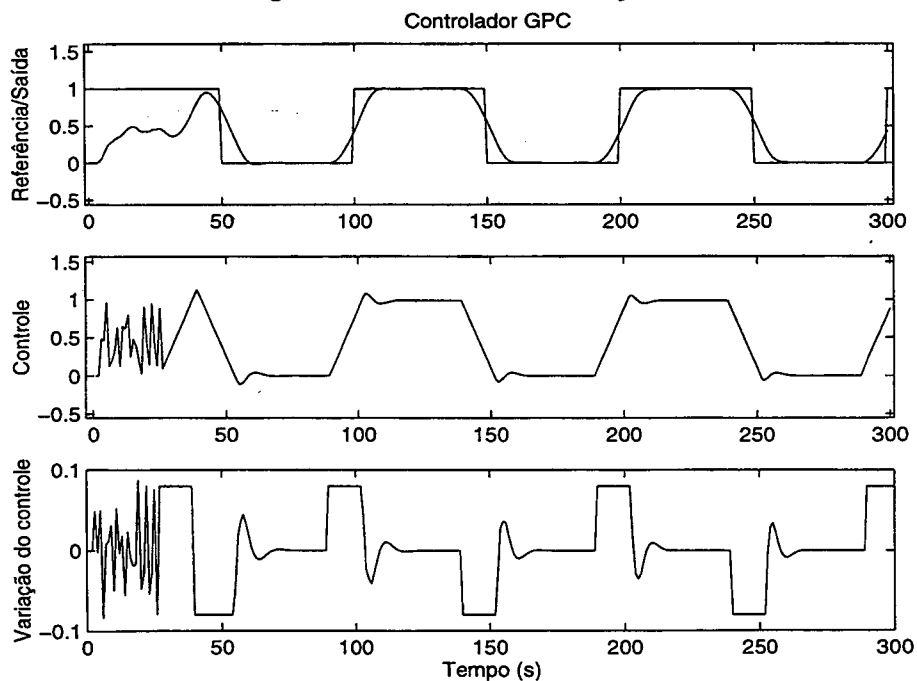


Figura 3.3: Restrições no incremento do controle (planta estável)

e substituindo a previsão  $y(t+j|t)$  no lugar de  $y(t+j)$  pode-se recalcular a equação (2.17). As restrições no sobre-sinal da equação (3.16) podem ser reescritas na forma vetorial como:

$$G \Delta u(t+j-1) \leq j \delta_{\max} - y(t+j|t) + y(t) \quad (3.18)$$

$$-G \Delta u(t+j-1) \leq -j \delta_{\min} + y(t+j|t) - y(t) \quad (3.19)$$

A sub-matriz de restrições tem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} G \\ -G \end{bmatrix} \Delta u \leq \begin{bmatrix} j \delta_{\max} - y(t+j|t) + y(t) \\ -j \delta_{\min} + y(t+j|t) - y(t) \end{bmatrix}$$

### 3.2.5 Exemplos Ilustrativos

Para ilustrar como as restrições podem ser utilizadas no projeto do GPC, para melhorar o comportamento dinâmico em malha fechada, diferentes tipos de processos são simulados no ambiente de simulação MATLAB.

**Exemplo 3.1** - Considere a seguinte planta :

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{1}{40s^2 + 10s + 1} \quad (3.20)$$

Para um período de amostragem  $T=2s$ , tem-se o seguinte processo discreto :

$$\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} = \frac{0.0423 + 0.0358q^{-1}}{1 - 1.53q^{-1} + 0.607q^{-2}} \quad (3.21)$$

O algoritmo GPC sem restrições é sintonizado com  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 10$ ,  $N_u = 1$  e  $\lambda = 0$ , proporcionando um comportamento em malha fechada conforme ilustrado na fig.(3.2). Nas primeiras iterações, uma sequência pseudo-randômica é usada para a estimação dos parâmetros do modelo. A fig.(3.3) mostra o comportamento do sistema em malha fechada sujeito à restrição nos incrementos de controle  $-0.08 \leq \Delta u(t) \leq 0.08$ . Pode-se observar na fig.(3.3) que o controlador é capaz de manter a saída na referência, mas, em consequência, o tempo de acomodação é maior do que no caso não restrito, ou seja, uma resposta em malha fechada mais lenta.

A fig.(3.4) mostra o efeito das restrições no incremento do controle,  $-0.08 \leq \Delta u(t) \leq 0.08$ , e na amplitude do sinal de controle,  $0.2 \leq u(t) \leq 0.8$ . Como pode ser visto na

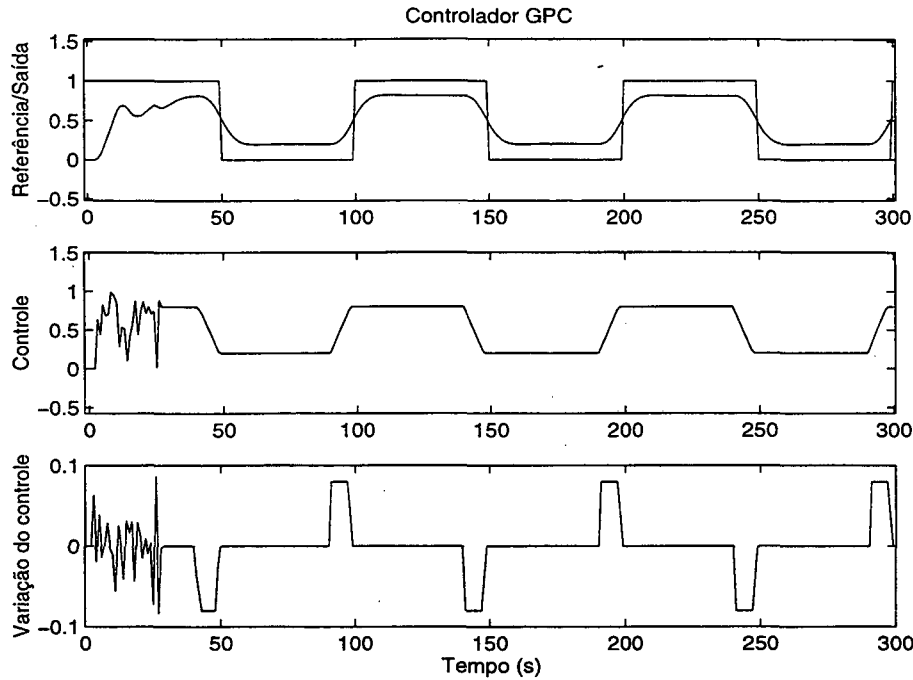


Figura 3.4: Restrições no incremento e na amplitude do controle (planta estável)

fig.(3.4) a referência não pode ser alcançada devido as restrições no controle. A saída do sistema é limitada por : limite do controle inferior/superior  $\times$  ganho D.C.

**Exemplo 3.2** - Para mostrar como as restrições podem ser usadas para melhorar o comportamento em malha fechada para sistemas de fase não-mínima considere a seguinte função de transferência discreta :

$$\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} = \frac{-1+2q^{-1}}{1-1.5q^{-1}+0.7q^{-2}} \quad (3.22)$$

A resposta obtida para as várias mudanças na referência quando o GPC não restrito é sintonizado em  $N_1 = 1, N_2 = 4, N_u = 1$  e  $\lambda = 0$  é ilustrado na fig.(3.5). Como pode ser observado, o comportamento em malha fechada exibe o típico comportamento de fase não-mínima com um pico inicial na direção oposta à mudança da referência. Muitas vezes esses picos não são desejáveis. A seguir, apresentam-se maneiras de diminuir a magnitude desses picos.

Na fig.(3.6) observa-se o comportamento do sistema controlado pelo algoritmo GPC com restrições nos incrementos do controle,  $-0.04 \leq \Delta u(t) \leq 0.04$ . Pode ser visto que a magnitude do pico é menor, porém o sistema é mais lento que o caso não restrito. O mesmo comportamento ocorre quando são atribuídas restrições na amplitude do sinal de controle.

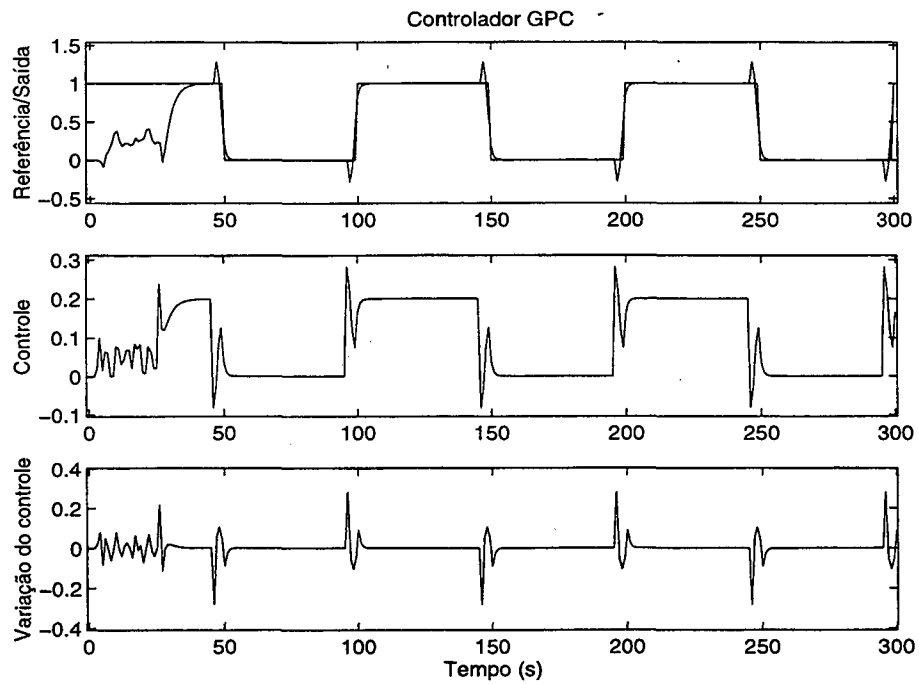


Figura 3.5: Comportamento do processo de fase não-mínima

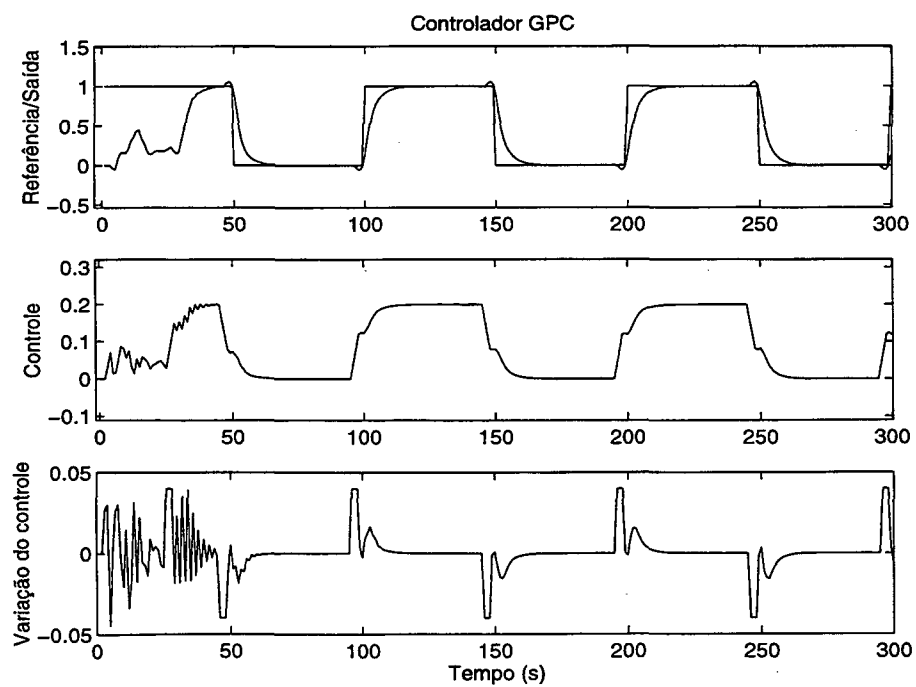


Figura 3.6: Restrições no incremento do controle (planta FNM)

Uma das mais interessantes aplicações do GPC com restrições em sistemas de fase não-mínima é dada na fig.(3.7). Restrições na amplitude do sinal de saída,  $-0.05 \leq y(t+j) \leq 1.05$ , e no incremento do controle,  $-0.08 \leq \Delta u(t) \leq 0.08$  foram consideradas. Como pode ser visto o sistema é lento mas o pico de fase não-mínima é eliminado pelas restrições da saída. Pode ser observado também que o sinal de controle gerado aumenta/diminui vagarosamente a fim de evitar o pico inverso.

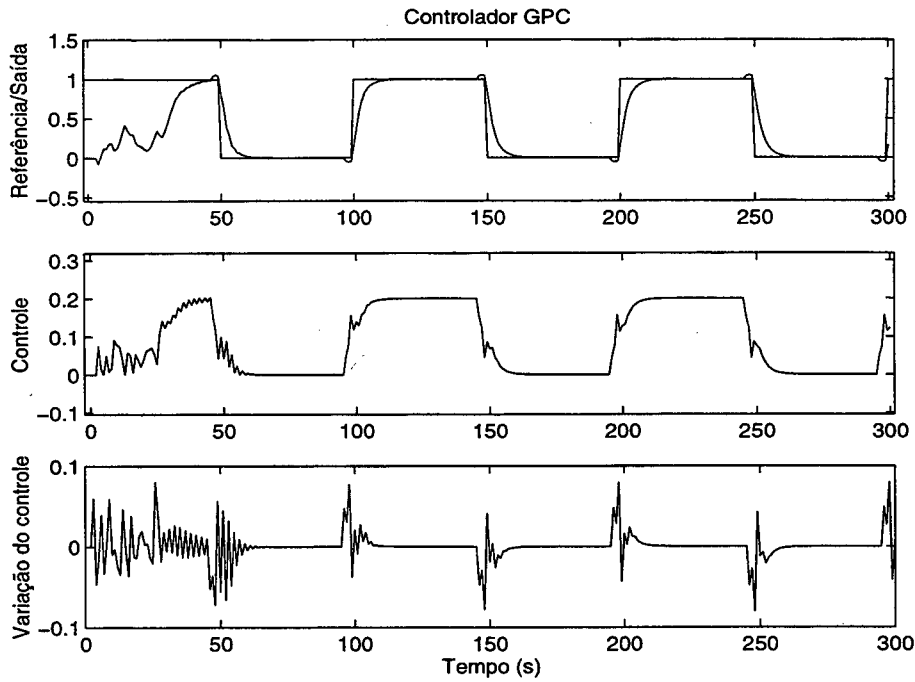


Figura 3.7: Restrições na amplitude da saída e no incremento do controle (planta FNM)

**Exemplo 3.3** - Para ilustrar como as restrições podem ser usadas para melhorar o comportamento em malha fechada para sistemas oscilatórios considere a seguinte função de transferência :

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{50}{s^2 + 0.01s + 25} \quad (3.23)$$

Para um período de amostragem  $T=1s$ , tem-se o seguinte processo discreto:

$$\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} = \frac{1.44 + 1.41q^{-1}}{1 - 0.564q^{-1} + 0.99q^{-2}} \quad (3.24)$$

A resposta obtida para várias mudanças na referência quando o GPC não restrito é sintonizado em  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 5$ ,  $N_u = 1$  e  $\lambda = 0$  é ilustrado na fig.(3.8). Observa-se que, o comportamento em malha fechada exibe o típico comportamento de sistemas oscilatórios.



Muitas vezes não é desejável ter oscilações na saída quando muda-se a referência. A seguir, apresentam-se procedimentos para atenuar essas oscilações.

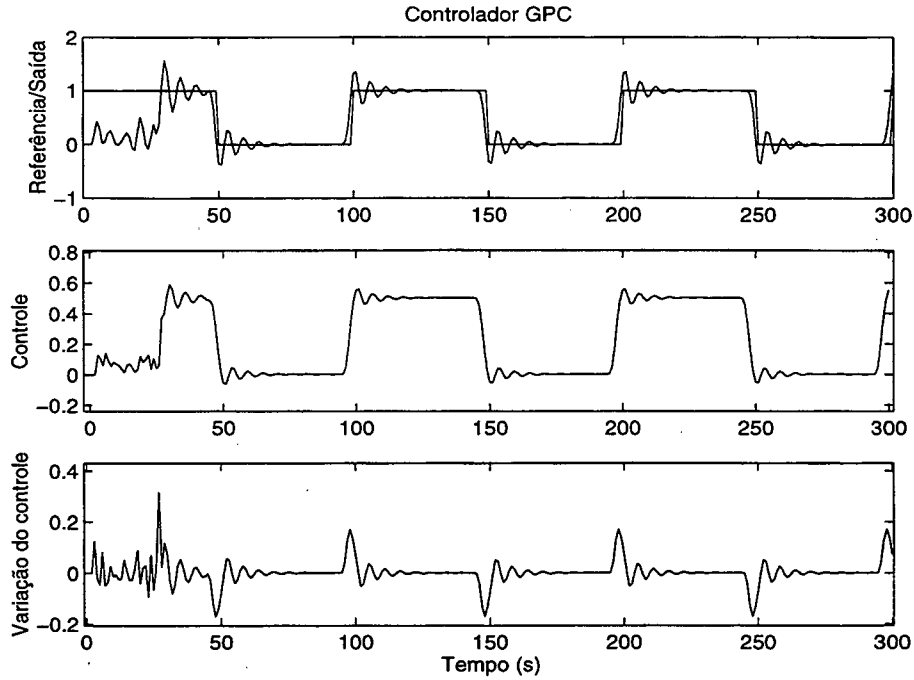


Figura 3.8: Comportamento de sistemas oscilatório

A segunda estratégia da seção (3.2.4) é implementada e os resultados são apresentados na fig.(3.9), onde é exibido o comportamento do sistema em malha fechada com o algoritmo GPC sujeito a restrições na derivada da saída,  $-0.13 \leq dy(t)/dt \leq 0.13$ , para tratar o problema do sobre-sinal.

Já a fig.(3.10) exhibe o comportamento do sistema em malha fechada com o algoritmo GPC sujeito a restrições na derivada da saída,  $-0.13 \leq dy(t)/dt \leq 0.13$ , junto com as restrições no incremento do controle,  $-0.04 \leq \Delta u(t) \leq 0.04$ , para tratar o problema do sobre-sinal.

Observa-se que a restrição do tipo  $dy(t)/dt$  para tratar o problema do sobre-sinal pode atenuar as oscilações da saída satisfatoriamente. A fig.(3.10) exhibe oscilações menores do que a fig.(3.9) devido às restrições no incremento do controle. Em contrapartida, sua resposta é mais lenta.

A seguir, é ilustrada a primeira estratégia cujo procedimento minimiza o sobre-sinal no projeto do GPC e que leva em conta o sinal de referência, onde a saída  $y(t+j)$  deve permanecer entre os limites inferior e superior do sinal de referência. A fig.(3.11) exhibe o comportamento da estratégia para restrições:  $W1_{min} = 0.9$ ;  $W1_{max} = 1.1$ ;  $W2_{min} = -0.1$ ;  $W2_{max} = 0.1$  e  $-0.08 \leq \Delta u(t) \leq 0.08$ . Nota-se que a estratégia atenua o sobre-sinal nos limites impostos, porém o sistema é lento.

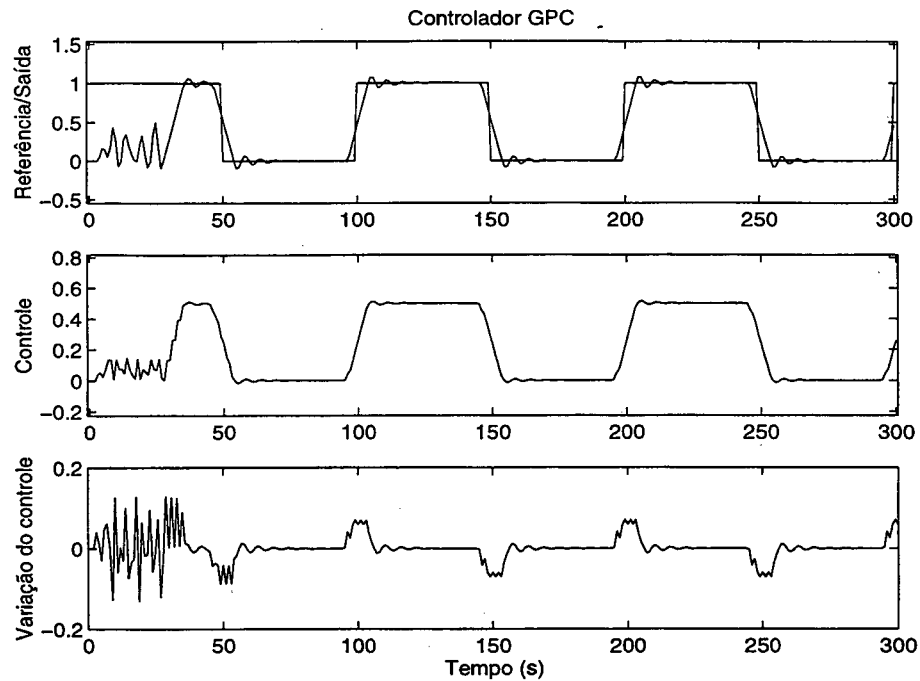


Figura 3.9: Restrições na derivada do sinal de saída (planta oscilatória)

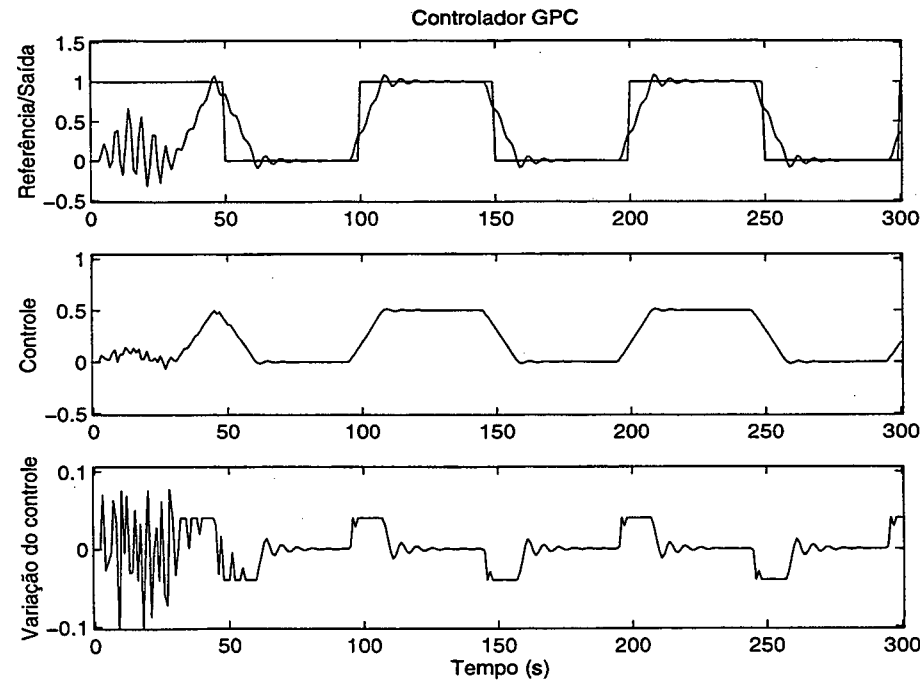


Figura 3.10: Restrições na derivada do sinal de saída e no incremento do controle (planta oscilatória)

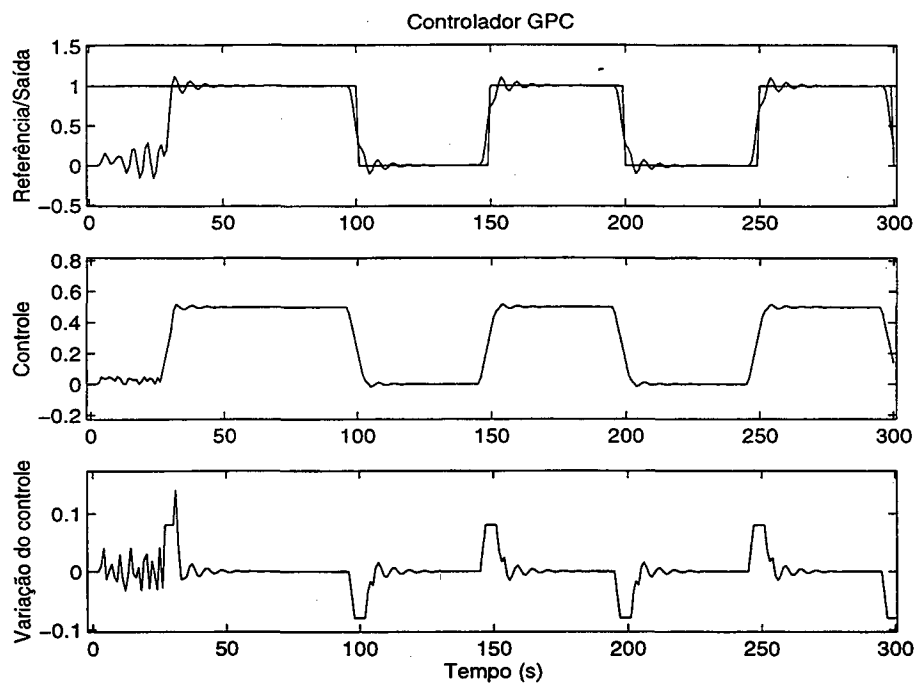


Figura 3.11: Restrições no sobre-sinal segundo a referência e restrições no incremento de controle (planta oscilatória)

### 3.3 Conclusão

Embora as restrições de entrada e saída sejam tratadas de modo semelhante, como foi mostrado neste capítulo, as implicações das restrições são diferentes. As restrições da saída são principalmente por razões satisfatórias, como por exemplo, controle de temperatura, nível, pressão e, devem ser controladas antecipadamente, porque as variáveis da saída são afetadas pela dinâmica do processo. As variáveis de entrada podem sempre ser mantidas no limite pelo controlador, reduzindo a ação do controle para um valor que satisfaça as restrições de amplitude e taxa de variação da variável de entrada.

Foi mostrado por meio de simulação que as restrições podem ser usadas para melhorar o desempenho de diferentes tipos de processos.

O comportamento do sistema em malha fechada sujeito a restrições nos incrementos do controle apresenta um controle suave, resultando em uma resposta lenta.

Observou-se que as restrições podem melhorar o comportamento em malha fechada para sistemas de fase não-mínima e sistemas oscilatórios.

No caso do sistema oscilatório foram apresentadas duas estratégias para tratar o problema do sobre-sinal. A primeira estratégia considera o sinal de referência, onde a saída  $y(t + j)$  deve permanecer entre os limites inferior e superior do sinal de referência. Na segunda estratégia, o grau de amortecimento da saída, foi expresso como o valor absoluto máximo da derivada da saída com respeito ao tempo. As duas estratégias por sua vez apresentaram suas vantagens e desvantagens, que podem ser destacadas como:

- Vantagens

Primeira estratégia: a máxima oscilação é especificada.

Segunda estratégia: não é preciso conhecer os valores futuros do sinal de referência.

- Desvantagens

Primeira estratégia : deve-se conhecer os valores futuros do sinal de referência.

Segunda estratégia : a difícil tarefa de especificar um adequado valor absoluto máximo da derivada da saída.



## Capítulo 4

# Eficiência Numérica dos Métodos de Otimização

### 4.1 Introdução

Algoritmos de controle preditivos para sistemas com restrições baseados na otimização de um problema quadrático com restrições lineares vem sendo propostos na literatura [9],[25],[46],[58]. Estudos de simulação mostram que o desempenho no controle destes sistemas é superior aos controladores preditivos convencionais e que a definição das restrições pode ser uma estratégia para a sintonia do controlador.

Na literatura existem vários algoritmos de otimização que resolvem exatamente o problema QP (Programação Quadrática) e com um número finito de passos. Estes algoritmos podem ser divididos em três grupos: aqueles baseados no cálculo dos multiplicadores de Lagrange (tal como o método do conjunto ativo de Fletcher [22]); aqueles que reduzem o problema QP para um problema de mínimos quadrados não-negativos [32] ou aqueles que reduzem o problema QP para um problema de complementaridade [5]. Tsang e Clarke em 1988 notaram que o algoritmo Lawson-Hanson é “complexo e computacionalmente extremamente taxante” [58]. As técnicas baseadas na redução para um problema de complementaridade linear requerem não-negatividade das variáveis independentes. Em 1993 Camacho transforma o problema GPC QP para um problema de não-negatividade e resolve pelo algoritmo de Lemke’s [9], [33]. Um dos principais problemas associados a estas abordagens é o elevado tempo computacional requerido para a execução “*on-line*”. Esta característica não é relevante em sistemas com período de amostragem elevado, da ordem de segundos ou minutos, daí o sucesso no controle de processos petroquímicos. Porém, sua utilização pode ser inviável em sistemas com dinâmicas rápidas. Neste contexto são apresentados três métodos de otimização não-linear utilizados no algoritmo GPC que resolve o problema de programação quadrática com restrições lineares e que não requerem a reformulação do problema original QP, isto é

$$\begin{aligned}
&\text{minimize} && J = \frac{1}{2} x^T H x + f^T x \\
&\text{sujeito a:} && P x \leq q
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Os métodos de otimização utilizados são: O Método das Direções Factíveis do Gradiente Projetado de Rosen (GPR); O Método do Ponto Interior Primal-Dual (PIPD); O Método do Ponto Interior Corretor-Preditor (PICP).

## 4.2 Método das Direções Factíveis

Esta classe de métodos resolve um problema de programação não-linear movendo-se de um ponto factível para um outro ponto factível melhor. A seguinte estratégia é típica de algoritmos de direções factíveis. Dado um ponto factível  $x_k$ , uma direção  $d_k$  é determinada tal que para  $\lambda > 0$  e suficientemente pequeno, as seguintes propriedades são verdadeiras:

- (1)  $x_k + \lambda d_k$  é factível,
- (2) o valor objetivo de  $x_k + \lambda d_k$  é melhor do que o valor objetivo de  $x_k$ .

Depois que uma direção é determinada, um problema de otimização uni-dimensional é resolvido para determinar como proceder ao longo de  $d_k$ . Isto leva para um novo ponto  $x_{k+1}$  e o procedimento é repetido. Consequentemente, a factibilidade primal é muitas vezes referida como método primal. Mostra-se que estes métodos convergem para soluções KKT (“Karush-Kuhn-Tucker”) [5].

### 4.2.1 Método do Gradiente Projetado de Rosen (GPR)

Nesta subseção é apresentado de forma resumida o algoritmo do método do gradiente projetado de Rosen que resolve o problema (4.1). Considera-se que para toda solução factível, o conjunto das restrições são linearmente independentes. Caso contrário, quando as restrições ativas são dependentes,  $(PP^T)$  é singular e o principal passo do algoritmo não é definido. Consequentemente, em tal caso, os multiplicadores de Lagrange não são únicos, e uma seleção arbitrária na diminuição de uma restrição pode causar ao algoritmo uma solução que não garante as condições KKT.

#### - Algoritmo para o Método do Gradiente Projetado de Rosen

- Passo de inicialização:

Escolher um ponto  $x_1$  com  $Px_1 \leq q$ . Supor que  $P^T$  e  $q^T$  são decompostos em  $(P_1^T, P_2^T)$  e  $(q_1^T, q_2^T)$ ; tal que  $P_1x_1 = q_1$  e  $P_2x_1 < q_2$ . Faça  $k=1$  e vá para o passo principal.

• Passo principal:

Passo (1) - Seja  $P_1^T$ .

Se  $P_1$  é vazio,

pare se  $\nabla f(x_k) = 0$ ,  $x_k$  é um ponto KKT

Se  $\nabla f(x_k) \neq 0$ , seja  $d_k = -\nabla f(x_k)$ , e vá para o passo 2.

Caso  $P_1$  não seja vazio,

$P = I - P_1^T(P_1P_1^T)^{-1}P_1$  e  $d_k = -P\nabla f(x_k)$ .

Se  $d_k \neq 0$ ,

vá para o passo 2.

Se  $d_k = 0$ ,

calcule  $w = -(P_1P_1^T)^{-1}P_1\nabla f(x_k)$  e  $u^T = w^T$ .

Se  $u \geq 0$ , pare;  $x_k$  é um ponto KKT, com  $w$  cedendo os associados multiplicadores de Lagrange.

Se alguma componente  $u < 0$ , seleccionar uma componente negativa de  $u$ , seja,  $u_j$ . Atualizar  $P_1$  deletando a linha correspondente a  $u_j$  e repetir o passo (1).

Passo (2) - Seja  $\lambda_k$  uma solução ótima para o seguinte problema de busca:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f(x_k + \lambda d_k) \\ &\text{sujeito a:} && 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max} \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde  $\lambda_{\max}$  é dado por:

$$\lambda_{\max} = \begin{cases} \text{mínimo} & \{ \hat{b}_i / \hat{d}_i : \hat{d}_i > 0 \} & \text{se } \hat{d} > 0 \\ \infty & & \text{se } \hat{d} \leq 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

sendo que :

$$\begin{aligned} \hat{b} &= q_2 - P_2 - x_k \\ \hat{d} &= P_2 d_k \end{aligned}$$

Logo  $x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$ , e supor que  $P^T$  e  $q^T$  são decompostos em  $(P_1^T, P_2^T)$  e  $(q_1^T, q_2^T)$  tal que  $P_1x_{k+1} = q_1$  e  $P_2x_{k+1} < q_2$ . Substituir  $k$  por  $k+1$  e repita o passo (1).



## 4.3 Método do Ponto Interior

Os métodos de ponto interior têm sido estudados e aplicados por pesquisadores para a solução de problemas lineares em grande dimensão [37], [38]. Embora, estes métodos tenham sido primeiro introduzidos em programação não-linear por Fiacco e McCormick [23] há mais de 20 anos atrás, somente em meados da década de 80, Karmarkar apresentou um método, que de forma simples e eficiente, agregava as restrições ao processo de solução dos problemas de otimização [27]. Esta técnica ficou conhecida, na literatura, como Método de Otimização de Pontos Interiores

A teoria fundamental para os métodos de pontos interiores pertence ao tradicional método de penalidade interior classicamente apresentado por Fiacco e McCormick para resolver problemas convexos [28],[41]. A idéia básica do algoritmo é resumida nos seguintes passos:

- (1) Transformar as restrições de desigualdade em restrições de igualdade pela utilização de variáveis de folga com a condição de não-negatividade associada a essas variáveis;
- (2) Eliminar as condições de não-negatividade das variáveis de folga incorporando à função objetivo uma penalidade apresentada por uma função barreira logarítmica;
- (3) Transformar o problema com restrições de igualdade em um problema irrestrito, incorporando-se as restrições de igualdade à função objetivo pela utilização de multiplicadores de Lagrange obtendo-se desta forma, a função Lagrangeana;
- (4) Usar o método Newton-Raphson para resolver as equações não-lineares resultantes da aplicação das condições de otimalidade de primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para o problema de otimização irrestrita.

Neste trabalho, dois métodos de ponto interior são usados para resolver o problema (4.1) : o método do ponto interior primal-dual (PIPD) e o método do ponto interior corretor preditor (PICP) que são formulados a seguir.

### 4.3.1 Formulação Matemática do Método Primal-Dual

Considere o seguinte problema de otimização :

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize} && f(x) \\
 &\text{sujeito a:} && g(x) = 0 \\
 &&& h(x) \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

onde  $x$  é o vetor das variáveis de decisão,  $x \in \mathbb{R}^q$ ;  $f(x)$  é a função custo ou função objetivo,  $f(x) \in \mathbb{R}$ ;  $g(x) = 0$  é o conjunto das restrições de igualdade,  $g(x) \in \mathbb{R}^m$ ;  $h(x) \geq 0$  é o conjunto das restrições de desigualdade,  $h(x) \in \mathbb{R}^p$ .

Associando-se variáveis de folga nas restrições de desigualdade para transformá-la em restrições de igualdade e acrescentando a barreira logarítmica na função objetivo, obtém-se

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f(x) - \mu \sum_i \ln s_i \\ &\text{sujeito a:} && g(x) = 0 \\ & && h(x) - s = 0 \\ & && s_i \geq 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

onde  $\mu$  é o parâmetro barreira do método de Pontos Interiores, que tende a zero no transcorrer do processo iterativo e  $s$  é o vetor das variáveis de folga,  $s = [s_1, s_2, \dots, s_p]$ .

Para essa formulação, a função Lagrangeana correspondente é :

$$L(x, s, \lambda, \pi) = f(x) - \mu \sum_i \ln s_i - \lambda^T g(x) - \pi^T [h(x) - s] \tag{4.6}$$

onde  $\lambda$  é o vetor dos multiplicadores de Lagrange das restrições de igualdade,  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  e  $\pi$  é o vetor dos multiplicadores de Lagrange das restrições de desigualdade,  $\pi \in \mathbb{R}^p$ .

Se  $s_i \geq 0$ , as condições necessárias de otimalidade de primeira ordem (KKT) para este novo problema de otimização são :

$$\nabla_x L = \nabla_x f(x) - [\nabla_x g(x)]^T \lambda - [\nabla_x h(x)]^T \pi = 0 \tag{4.7}$$

$$\nabla_s L = \mu e - S\pi = 0 \tag{4.8}$$

$$\nabla_\lambda L = g(x) = 0 \tag{4.9}$$

$$\nabla_\pi L = h(x) - s = 0 \tag{4.10}$$

onde  $\nabla$  significa a função gradiente,  $\nabla_x f(x)$  é o gradiente de  $f(x)$ ,  $\nabla_x h(x)$  é o gradiente de  $h(x)$ ,  $e = [1, 1, \dots, 1]^T$ ,  $e \in \mathbb{R}^p$  e  $S$  é uma matriz diagonal em  $\mathbb{R}^{p \times p}$  cujos elementos são os elementos do vetor  $s$ .

Este sistema de equações não-lineares pode ser resolvido, por exemplo, utilizando-se o método de Newton-Raphson e, então, encontra-se a solução do problema de otimização.

### 4.3.2 Solução do Problema GPC QP pelo Método Ponto Interior Primal-Dual

Para a aplicação do método de Pontos Interiores no controlador GPC, o problema formulado em (4.1) é transformado através da adição de variáveis de folga (variáveis primais) nas restrições de desigualdade, resultando no problema :

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & J = \frac{1}{2} x^T H x + f^T x \\ \text{sujeito a:} \quad & P x + s = q \\ & s \geq 0 \end{aligned} \tag{4.11}$$

a condição de não-negatividade da variável de folga “s” é tratada através de uma função barreira logarítmica adicionada à função objetivo. Analiticamente, isto é expresso como:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & J = \frac{1}{2} x^T H x + f^T x - \mu \sum \ln s \\ \text{sujeito a:} \quad & P x + s = q \end{aligned} \tag{4.12}$$

onde o parâmetro  $\mu$  da função barreira é um número positivo que tende iterativamente a zero quando a solução se aproxima do ótimo. As restrições de igualdade são incorporadas à função objetivo através de multiplicadores de Lagrange  $\pi$  (variáveis duais) resultando na função Lagrangeana dada por:

$$\text{minimize} \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} x^T H x + f^T x - \mu \sum \ln s - \pi^T (P x + s - q) \tag{4.13}$$

assumindo que as estimativas atuais para as variáveis primais e duais satisfazem :

$$\begin{aligned} s &\geq 0 \\ \pi &\leq 0 \\ P x + s - q &= 0 \end{aligned} \tag{4.14}$$

aplicando as condições de otimalidade de primeira ordem de KKT têm-se:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = H x + f^T - P^T \pi = 0 \tag{4.15}$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial s} = S\pi + \mu e = 0. \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \pi} = -(Px + s - q) = 0 \quad (4.17)$$

onde  $e = [1, \dots, 1]^T$ ,  $S$ ,  $\Pi$  são matrizes diagonais contendo os elementos  $s_i$  e  $\pi_i$ , respectivamente. Estas equações não-lineares são resolvidas pelo método de Newton-Raphson [57] e este é composto pelas seguintes equações :

$$C(x, \pi) \Delta x - P^T \Delta \pi = -\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x} \quad (4.18)$$

$$P \Delta x + \Delta s = -\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \pi} \quad (4.19)$$

$$\Pi \Delta s + S \Delta \pi = -\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial s} \quad (4.20)$$

onde  $C(x, \pi) = \nabla^2 x(\mathbf{L}) = \nabla x(Hx + f^T - P^T \pi)$  é a matriz Hessiana.

A solução determina o incremento das variáveis na direção de busca  $(\Delta x, \Delta s, \Delta \pi)$ , resultando a cada iteração no sistema linear mostrado a seguir.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} C & -P^T & 0 \\ P & 0 & I \\ 0 & S & \Pi \end{bmatrix}}_{E_{sist}} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \pi \\ \Delta s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} [(Hx + f^T) - P^T \pi] \\ (Px - q + s) \\ (\mu e + S\pi) \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

sendo " $E_{sist}$ " uma matriz, onde todos os seus elementos são as derivadas parciais de segunda ordem da função objetivo aumentada com respeito a todas variáveis.

Uma vez resolvido o sistema (4.21), a próxima etapa é determinar o comprimento do passo nos espaços primal e dual, de modo que as equações (4.14) sejam respeitadas. Isto é feito como a seguir :

$$\alpha_p = \min \left\{ \min_{\Delta s_j < 0} \frac{s_j}{\|\Delta s_j\|}, 1 \right\} \quad (4.22)$$

$$\alpha_d = \min \left\{ \min_{\Delta \pi_j > 0} \frac{-\pi_j}{\|\Delta \pi_j\|}, 1 \right\} \quad (4.23)$$

A nova solução é determinada pela atualização das variáveis:

- Primais

$$\begin{aligned} x &= x + \sigma \alpha_p \Delta x \\ s &= s + \sigma \alpha_p \Delta s \end{aligned} \quad (4.24)$$

- Duais

$$\pi = \pi + \sigma \alpha_d \Delta \pi \quad (4.25)$$

onde  $\sigma = 0.9995$ . A função barreira “ $\mu$ ” está relacionada ao “gap” de dualidade entre os problemas primal e dual, e pode ser calculada por:

$$\mu = -\frac{s^T \pi}{2m\beta} \quad (4.26)$$

onde “ $\beta$ ” é um parâmetro maior que 1 especificado pelo usuário e “ $m$ ” é o número de restrições do problema mais o número de variáveis de decisão.

### 4.3.3 Redução do Sistema Linear do Método de Pontos Interiores Primal-Dual

O sistema de equações não-lineares formado pelas equações (4.18), (4.19), (4.20) apresenta, em geral, ordem elevada em problemas práticos de sistemas de controle. Este sistema, tem a sua ordem reduzida bastando para isso que se atente para a equação (4.19), [24]. Desta forma, obtém-se :

$$\Delta s = -(Px + s - q) - P\Delta x \quad (4.27)$$

Substituindo a equação (4.27) em (4.20) obtém-se :

$$\Delta \pi = -S^{-1}(S\pi + \mu e + \Pi(Px - q + s)) + S^{-1}\Pi P\Delta x \quad (4.28)$$

e com a substituição da equação (4.28) em (4.18) resulta

$$(C(x, \pi) - P^T S^{-1} \Pi P) \Delta x = -\frac{\partial L}{\partial x} - P^T S^{-1} (S\pi + \mu e + \Pi(Px - q + s)) \quad (4.29)$$

Fazendo

$$\begin{aligned}\tilde{w}(x, \pi) &= C(x, \pi) - P^T S^{-1} \Pi P \\ \tilde{t} &= -\frac{\partial L}{\partial x} - P^T S^{-1} (S\pi + \mu e + \Pi(Px - q + s))\end{aligned}\tag{4.30}$$

que forma o sistema reduzido :

$$\underbrace{[\tilde{w}(x, \pi)]}_{E_{sist}} [\Delta x] = [-\tilde{t}] \tag{4.31}$$

A utilização do sistema reduzido da equação (4.31) faz com que o número de equações deste sistema não dependa do número de restrições de desigualdade utilizadas para o cálculo da lei de controle. Portanto, a ordem do sistema linear é sempre dependente do horizonte de controle  $N_u$ .

#### - Algoritmo para o Método Ponto Interior Primal-Dual

- Passo de inicialização:

Especificar  $\mu$  e  $\beta$ . Calcular as variáveis de folga usando a equação (4.17), respeitando as condições de não-negatividade associada a essas variáveis. De posse dos resultados calcular as variáveis duais pela equação (4.16).

- Passo principal:

Passo (1) - Calcular o vetor gradiente de acordo com a equação (4.21).

Passo (2) - Teste de convergência. Se o critério de convergência é satisfeito, a solução ótima é encontrada. Caso contrário prosseguir para o passo seguinte.

Passo (3) - Se o sistema é completo

Resolver o sistema de equações lineares (4.21).

Se o sistema é reduzido

Resolver o sistema de equações lineares (4.31)

Resolver as equações (4.28) e (4.27).

Passo (4) - Calcular o comprimento da função “ $\alpha$ ” conforme as equações (4.22) e (4.23) e atualizar a solução, de acordo com as equações (4.24) e (4.25).

Passo (5) - Ajustar o parâmetro da função barreira “ $\mu$ ” através da equação (4.26) e retornar ao passo 1.

O critério de parada consiste em verificar se as seguintes condições são satisfeitas simultaneamente:  $\mu \leq$  tolerância especificada e  $\| \text{gradiente} \| \leq$  tolerância especificada.

Em caso afirmativo, um ponto estacionário é atingido. A rigor, deve ser observado se a matriz Hessiana é positiva definida no ponto considerado. Como nos casos práticos este procedimento é inviável, o sinal dos multiplicadores duais (correspondentes às restrições de desigualdade no limite) é verificado. Assim, no caso de um limite inferior ser atingido, o sinal da variável dual deve ser positivo, e negativo no caso de um limite superior, para que a solução ótima seja considerada alcançada.

#### 4.3.4 Solução do Problema GPC QP pelo Método do Ponto Interior Corretor Predictor

S. Mehrotra em 1992 sugeriu uma extensão para o método do ponto interior primal-dual denominado método do ponto interior corretor predictor [41],[60],[61]. A principal diferença entre o algoritmo ponto interior primal-dual e corretor predictor é a introdução de termos não-lineares na equação (4.16). Após adicionar os termos não-lineares (termos de segunda ordem), a equação (4.21) modifica-se para :

$$\mu e + S\pi + S\Delta\pi + \Pi\Delta s + 1/2 \Delta S \Delta\pi + 1/2 \Delta S \Delta\pi = 0 \quad (4.32)$$

$$S\Delta\pi + \Pi\Delta s = -(\mu e + S\pi) - \Delta S \Delta\pi \quad (4.33)$$

Logo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} C & -P^T & 0 \\ P & 0 & I \\ 0 & S & \Pi \end{bmatrix}}_{E_{sist}} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta\pi \\ \Delta s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} [(Hx + f^T) - P^T\pi] \\ (Px - q + s) \\ (\mu e + S\pi + \Delta S\Delta\pi) \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

O método corretor predictor primeiro toma um passo afim onde o parâmetro barreira é levado à zero. Assim, o parâmetro barreira e os termos de segunda ordem podem ser calculados para os resultados do passo afim, e o próprio lado direito da equação (4.34) é calculado. Esta equação é então resolvida para os termos corrigidos. O passo afim consiste da solução do seguinte sistema:

$$[E_{sist}] \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta\pi \\ \Delta s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} [(Hx + f^T) - P^T\pi] \\ (Px - q + s) \\ (S\pi) \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

A solução é então usada não somente para aproximar os termos não-lineares no lado direito da equação (4.34), mas para dinamicamente estimar o parâmetro barreira  $\mu$ :

$$\mu = \left( \frac{g\tilde{a}p}{gap^*} \right)^2 \times \frac{g\tilde{a}p}{2m} \quad (4.36)$$

sendo que  $g\tilde{a}p$  é o gap de complementaridade considerando as variáveis atualizadas. O  $gap^*$  é também um gap de complementaridade mas sem considerar as variáveis atualizadas:

$$gap^* = -(s^T \pi) \quad (4.37)$$

$$g\tilde{a}p = -(s + \tilde{\alpha} \Delta s)^T \times (\pi + \tilde{\alpha} \Delta \pi) \quad (4.38)$$

onde:

$$\tilde{\alpha} = \min \left\{ \min_{\Delta s_j < 0} \frac{s_j}{\|\Delta s_j\|}, \min_{\Delta \pi_j > 0} \frac{-\pi_j}{\|\Delta \pi_j\|} \right\} \quad (4.39)$$

Uma vez que os termos não-lineares e o novo parâmetro são obtidos, as equações do lado direito do vetor de iteração da equação (4.34) podem ser calculadas. Resolvendo estas equações outra vez, as mudanças em todas variáveis são obtidas. Note que a matriz Hessiana não muda totalmente e a matriz fatorada anteriormente é usada novamente nesta sub-iteração.

#### - Algoritmo para o Método Ponto Interior Corretor Predictor

- Passo de inicialização:

Calcular as variáveis de folga usando a equação (4.17), respeitando as condições de não-negatividade associadas a essa variável. Dado um fator penalidade  $\mu$ , calcular as variáveis duais pela equação (4.16).

- Passo principal:

Passo (1) - Calcular o vetor gradiente de acordo com a equação (4.21) e verificar a convergência. Se o critério de convergência é satisfeito, a solução ótima é encontrada. Caso contrário prosseguir ao passo seguinte.

Passo (2) - Ajustar " $\mu$ " igual a zero, recalculando o vetor gradiente e resolver o sistema de equações (4.35). Aproximar os termos não-lineares e estimar o parâmetro barreira  $\mu$  através da equação (4.36). Recalculando o gradiente da equação de correção (4.34).

Passo (3) - Resolver o sistema de equações (4.34) corrigido.

Passo (4) - Calcular o comprimento da função " $\alpha$ " conforme as equações (4.22) e (4.23), atualizar todas as variáveis e voltar para o passo (1).



## 4.4 Critérios de Convergência

Para a solução do sistema não-linear formado pelas condições necessárias de otimalidade de primeira ordem aplicadas à função Lagrangeana utiliza-se o método de Newton. Este, por se tratar de um método iterativo, requer um critério de convergência. Desta forma, são basicamente dois os critérios utilizados [24].

- valor absoluto do parâmetro barreira.
- a norma euclidiana (norma dois) do gradiente da função Lagrangeana.

Em termos matemáticos, pode-se afirmar que o procedimento foi considerado convergente quando os dois critérios apresentados anteriormente foram satisfeitos. Analiticamente,

$$|\mu| \leq tol_{\mu} \quad (4.40)$$

$$\|gradL\| \leq tol_{grad} \quad (4.41)$$

## 4.5 Condições de Otimalidade de Segunda Ordem

As condições de otimalidade de segunda ordem para problemas com restrições de desigualdade são obtidas essencialmente considerando-se as restrições ativas no ponto ótimo. Nesta solução, o problema de otimização original é convertido em um problema com apenas restrições de igualdade. Para mostrar isto, seja o problema de otimização

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f(x) \\ &\text{sujeito a:} && g(x) = 0 \\ & && h(x) \geq 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

- Condições Necessárias

Suponha que  $x^*$  é um ponto que satisfaz as condições de KKT. Então a condição necessária de otimalidade de segunda ordem para que  $x^*$  seja um mínimo para o problema (4.42) é que a matriz Hessiana

$$L(x^*) = \nabla^2_x f(x^*) - \lambda^T G(x^*) - \pi_{Pa}^T \nabla_x h_{Pa}(x^*) \quad (4.43)$$

seja positiva semidefinida no subespaço tangente das restrições ativas em  $x^*$  (“ $P_a$  é o conjunto das restrições ativas”). A demonstração está contida em [36].

- Condições Suficientes

As condições suficientes de segunda ordem para que um ponto  $x^*$ , satisfazendo as condições de KKT, seja um mínimo para o problema (4.42) é que a matriz Hessiana

$$L(x^*) = \nabla^2_x f(x^*) - \lambda^T G(x^*) - \pi_{P_a}^T \nabla_x h_{Pa}(x^*) \quad (4.44)$$

seja positiva definida no espaço

$$R = \{ y \mid \nabla g(x^*)y = 0, \nabla h_j(x^*)y = 0 \quad \forall j \in J \} \quad (4.45)$$

onde  $J = \{ j \mid h_j(x^*) = 0, \pi_j > 0 \}$

A demonstração pode ser encontrada em [36].

Esta condição pode ser interpretada da seguinte forma, “a projeção da matriz Hessiana ( $L$ ) da função Lagrangeana no espaço nulo da matriz Jacobiana ( $J$ ) dos conjuntos de restrições de igualdade e de desigualdade deve ser positiva definida” [53]. Nesta condição, “ $R$ ” é a matriz base do espaço nulo de “ $J$ ”. Qualquer deslocamento  $\Delta x$  que produz uma solução viável pode ser expresso como uma combinação linear das colunas de “ $R$ ”. A matriz “ $R$ ” define um espaço cujas componentes são ortogonais as de “ $J$ ”. Este é o único espaço onde pode haver qualquer liberdade para adicional minimização. Portanto, matematicamente, se a matriz obtida por “ $R^T L R$ ” é positiva definida em  $x^*$ , o ponto  $x^*$  é um ponto de mínimo do problema (4.42).

Para finalizar, é importante salientar que, em problemas reais de controle, calcular as condições de otimalidade de segunda ordem, analisando como apresentado anteriormente, requer grande esforço computacional. Este esforço pode ser comparado ao da obtenção do ponto estacionário. Portanto, o que costuma-se fazer na prática é determinar se um ponto que respeita as condições necessárias de otimalidade (condições KKT) é de mínimo, fazendo o teste de otimalidade no vetor gradiente do Lagrangeano e nos sinais dos multiplicadores de Lagrange. Ainda, uma outra alternativa que pode ser aplicada, não muito técnica porém prática, é verificar a melhora obtida na solução objetivo e na qualidade da solução no que diz respeito as condições de desigualdade.

## 4.6 Comparação entre os Métodos de Otimização

Um dos principais problemas associados a utilização dos métodos de otimização para o cálculo da lei de controle do GPC em sistemas com restrições é o elevado esforço computa-

cional requerido para sua execução. Este fato motiva a procura de métodos de otimização que requeiram um baixo esforço computacional para sua execução e também de estratégias para a diminuição deste esforço.

Os algoritmos de otimização são implementados no ambiente de simulação MATLAB versão 4.2. A seguir, avalia-se o desempenho dos algoritmos de otimização segundo o esforço computacional, o processo de inicialização dos métodos de pontos interiores e quanto a influência do critério de convergência dos métodos de otimização no desempenho do GPC.

#### 4.6.1 Esforço Computacional dos Métodos de Otimização

**Exemplo 4.1** - Seja o processo

$$G(q^{-1}) = \frac{-1 + 2q^{-1}}{1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2}} \quad (4.46)$$

O esforço computacional dos algoritmos de otimização são avaliados em três casos:

Caso (1) - Processo sujeito a restrições na variação do controle,  $-0.04 \leq \Delta u(t) \leq 0.04$ , e amplitude do sinal de controle,  $0 \leq u(t) \leq 0.2$ , sintonizado com horizontes  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 4$ ,  $N_u = 2$  e  $\lambda = 0$ .

Caso(2) - Processo sujeito a restrições na variação do controle,  $-0.04 \leq \Delta u(t) \leq 0.04$ , e amplitude do sinal de controle,  $0 \leq u(t) \leq 0.2$ , e restrições na amplitude do sinal de saída,  $-0.1 \leq y(t) \leq 1.02$ , sintonizado com horizontes  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 4$ ,  $N_u = 2$  e  $\lambda = 0$ .

Caso (3) - As restrições são as mesmas do caso 2, exceto que o horizonte  $N_2 = 10$ .

As tabelas (4.1), (4.2) e (4.3) ilustram o esforço computacional dos métodos de otimização.

Pode ser visto nas tabelas (4.2) e (4.3) que o caso 3, apesar de apresentar um menor número de iterações, conduz a um tempo maior. Isto ocorre por que a dimensão da matriz de restrições é consideravelmente maior, necessitando um esforço maior de cálculo.

É mostrado e provado na literatura que o algoritmo PICP têm uma convergência mais rápida em relação ao PIPD e que o tempo de computação também é menor apesar do algoritmo PICP apresentar um maior esforço computacional [61]. Isto deve-se ao fato que a matriz fatorada do sistema de equações (4.35) pode ser usada novamente em uma sub-iteração para resolver o sistema de equações (4.34). Nas simulações não foi possível utilizar o recurso da matriz fatorada devido a limitação do software MATLAB que não oferece este recurso, o que ocasionou um tempo médio maior nas simulações no algoritmo

GPR	Nº. de flops	Tempo.(seg)	Iterações
Caso 1	18.790	6,24 -	2
Caso 2	21.401	6,69	2
Caso 3	52.883	11,69	3

Tabela 4.1: Esforço computacional do método GPR

PIPD	Nº. de flops	Tempo.(seg)	Iterações
Caso 1	61.348	0,33	6
Caso 2	363.518	0,66	6
Caso 3	849.251	0,89	3

Tabela 4.2: Esforço computacional do método PIPD

PICP	Nº. de flops	Tempo.(seg)	Iterações
Caso 1	112.998	0,50	5
Caso 2	708.946	1,01	5
Caso 3	1.364.445	1,24	2

Tabela 4.3: Esforço computacional do método PICP

PICP, porém pode ser observado que o algoritmo converge para o ponto ótimo com um número menor de iterações.

#### 4.6.2 Processo de Inicialização dos Algoritmos de Pontos Interiores

Uma vez que as condições de KKT da função Lagrangeana produzem um sistema de equações não-lineares e este sistema é resolvido via método de Newton, o processo de inicialização utilizado é importante. O método de Pontos Interiores segundo [24], com relação ao processo de inicialização é robusto, a única exigência é que as variáveis de decisão sejam inicializadas dentro dos seus limites.

Embora os métodos de Pontos Interiores sejam robustos do ponto de vista de inicialização, a estimativa da solução inicial influi de uma forma decisiva na rapidez do procedimento iterativo (número de iterações para a convergência).

Existem vários procedimentos de inicialização sugeridos na literatura, [26],[61] mas neste trabalho é adotado o procedimento de inicialização sugerido por G. D. Irisarri (1996), por mostrar-se mais eficiente em relação as técnicas convencionais.

- Inicialização Sugerida por G. D. Irisarri.

O processo de inicialização sugerido por Guillermo D. Irisarri em [26] consiste basicamente de três etapas :

- (1) calcular as variáveis de folga utilizando as equações (4.17). Se, ao utilizar a equação mencionada, alguma variável de folga resultante é negativa, atribuir a esta variável um valor positivo qualquer.
- (2) atribuir, aleatoriamente, um valor positivo para o parâmetro barreira " $\mu$ ".
- (3) calcular os multiplicadores de Lagrange das restrições de desigualdade, que transformam-se em igualdade, pela equação (4.16).

A seleção do valor inicial do parâmetro barreira nos algoritmos de ponto interior é um fator importante. Embora o parâmetro tenda a zero quando a convergência é obtida, a seleção do valor inicial do parâmetro barreira afeta a convergência dos algoritmos de ponto interior tornando-os mais lentos ou mais rápidos, ou ainda não alcançando o ponto estacionário. O modo de fazer a inicialização adequada ainda é fonte de pesquisa na área de otimização.

Par. Barreira Inicial	Nº. de Iterações	Estado
1e-25		não converge
⋮		
1e-20	17	converge
1e-15	5	"
1e-10	4	"
1e-5	3	"
1e-4	6	"
1e-2	8	"
1	10	"
10	11	"
100	11	"
1000	12	converge

Tabela 4.4: Escolha inicial do parâmetro barreira - PIPD

As tabelas (4.4) e (4.5) mostram o impacto da seleção inicial do parâmetro barreira nos métodos PIPD e PICP. Pode ser observado que a convergência dos métodos de otimização PIPD e PICP é afetada significativamente pela inicialização do parâmetro barreira, contudo o método mostra-se robusto à inicialização. Observa-se, ainda, que o método primal-dual é mais sensível ao valor inicial do parâmetro barreira, pois para vários valores

Par. Barreira Inicial	N°. de Iterações	Estado
1e-55	-	não converge
⋮		
1e-35	204	converge
1e-30	16	"
1e-20	10	"
1e-10	3	"
1e-5	3	"
1e-4	3	"
1e-2	6	"
1	6	"
10	5	"
100	7	"
1000	6	converge

Tabela 4.5: Escolha inicial do parâmetro barreira - PICP

do parâmetro barreira inicial o método PIPD não converge, mas o método PICP sim. Isso ocorre devido ao fato que o parâmetro barreira é dinamicamente estimado a cada iteração no método PICP, tornando-se mais independente do valor inicial.

#### 4.6.3 Comparação dos Métodos de Pontos Interiores Utilizando a Matriz Reduzida e a Matriz Completa

Nesta seção foram realizadas comparações em termos do número de iterações necessárias para a convergência, do tempo de convergência, do condicionamento numérico da matriz " $E_{sist}$ " e do parâmetro barreira inicial, para os dois algoritmos de Pontos Interiores apresentados.

Algoritmo	Tipo de Matriz	N°. de Iterações	Tempo.(seg)	Condicionamento $E_{sist}$	Parâmetro Barreira
PIPD	Reduzida	3	0,22	329,21	1e-05
	Completa	3	0,49	1,27e+04	1e-05
PIPD	Reduzida	8	0,82	330,35	1
	Completa	8	1,87	1,29e+04	1

Tabela 4.6: Comparação dos métodos de pontos interiores utilizando a matriz reduzida e a matriz completa - PIPD

Pode ser observado nas tabelas (4.6) e (4.7) que a utilização da estratégia sugerida por [24], de fazer a redução no sistema linear a ser resolvido a cada iteração, proporciona

Algoritmo	Tipo de Matriz	Nº. de Iterações	Tempo.(seg)	Condicionamento $E_{sist}$	Parâmetro Barreira
PICP	Reduzida	3	0,33	1,81e+03	1e-05
	Completa	3	0,55	2,59e+05	1e-05
PICP	Reduzida	6	0,60	91,58	1
	Completa	6	1,04	1,15e+05	1

Tabela 4.7: Comparação dos métodos de pontos interiores utilizando a matriz reduzida e a matriz completa - PICP

ganho no tempo de convergência para os processos de otimização PIPD e PICP.

Devido ao fato da redução no sistema linear ser a aplicação de álgebra, o número de iterações realizadas pelo processo de otimização utilizando a redução do sistema tem que ser o mesmo do sistema linear completo.

Um resultado importante analisado neste trabalho é do condicionamento numérico das matrizes dos sistemas lineares, " $E_{sist}$ ". Observa-se, pelas tabelas (4.6) e (4.7), que os algoritmos que utilizam o sistema linear reduzido tendem a apresentar uma matriz de sistema " $E_{sist}$ " melhor condicionada em relação ao sistema linear completo.

Uma outra característica observada foi que o condicionamento da matriz " $E_{sist}$ " no método PICP utilizando a matriz reduzida é mais sensível a variação do parâmetro barreira inicial e que o condicionamento da mesma pode variar bruscamente para diferentes valores de " $\mu$ ".

Em suma, a redução no sistema linear proposta em [24] apresenta vantagens em termos de tempo computacional necessário para que o processo de otimização alcance o ponto ótimo e quanto ao condicionamento da matriz do sistema para resolver o problema de programação quadrática com restrições lineares.

#### 4.6.4 Influência do Critério de Convergência no Desempenho do GPC

Os critérios de parada dos métodos de otimização exercem uma grande influência no desempenho do GPC. A variável de parada dos métodos de otimização determina um compromisso entre o esforço computacional do algoritmo e a precisão requerida para a solução. Um valor menor para a variável de parada proporciona maior número de iterações, porém a solução fica mais próxima do ponto ótimo. Valores elevados para a variável de parada podem deteriorar o desempenho do sistema. A seleção adequada da variável de parada é função do processo controlado.

No caso do GPR as iterações do algoritmo são terminadas quando a variável de parada

satisfaz uma das condições:

- (1) os multiplicadores de Lagrange são maiores ou iguais a zero,
- (2) o gradiente do  $J_{GPC}$  é igual a zero.

Nos algoritmos PIPD e PICP as iterações são terminadas quando as variáveis de parada " $\mu$ " e a norma do vetor gradiente atinge os valores especificados.

A seguir, apresenta-se a influência das variáveis de parada nos métodos de otimização em dois processos, um de fase não-mínima e outro instável.

**Exemplo 4.2** - Processo de fase não-mínima :

$$G(q^{-1}) = \frac{-1 + 2q^{-1}}{1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2}} \quad (4.47)$$

sintonizado com horizontes  $N_1 = 1$ ,  $N_u = 1$ ,  $N_2 = 4$  e  $\lambda = 0$ .

**Exemplo 4.3** - Processo instável :

$$G(q^{-1}) = \frac{1.44 + 1.41q^{-1}}{1 - 0.564q^{-1} + 0.99q^{-2}} \quad (4.48)$$

sintonizado com horizontes  $N_1 = 1$ ,  $N_u = 1$ ,  $N_2 = 5$  e  $\lambda = 0$ .

A figura (4.1) ilustra o comportamento do processo de fase não-mínima, controlado pelo GPC usando o método de otimização PIPD com as variáveis de parada sintonizadas em  $\mu \leq 1e - 5$  e  $\|grad\| \leq 1e - 7$ . O comportamento do processo de fase não-mínima apresenta resultados semelhantes quando o controlador GPC usa o método de otimização GPR sintonizado em  $gradJ_{GPC} \leq 1e - 5$  e o método de otimização PICP sintonizado em  $\mu \leq 1e - 5$  e  $\|grad\| \leq 1e - 7$ .

O comportamento do processo de fase não-mínima usando o método PIPD com as variáveis de parada sintonizadas em  $\mu \leq 1e - 5$  e  $\|grad\| \leq 1$  é ilustrado na figura (4.2). Os resultados para o método GPR sintonizado em  $gradJ_{GPC} \leq 1$  e o método PICP sintonizado em  $\mu \leq 1e - 5$  e  $\|grad\| \leq 1$  apresentam resultados semelhantes.

A figura (4.3) apresenta o comportamento do processo instável, controlado pelo GPC usando o método de otimização PIPD com a variável de parada sintonizada em  $\mu \leq 1e - 5$  e  $\|grad\| \leq 1e - 7$ . O comportamento do processo instável apresenta resultados



semelhantes quando o controlador GPC usa o método de otimização GPR sintonizado em  $\text{grad}J_{GPC} \leq 1e-5$  e o método de otimização PICP sintonizado em  $\mu \leq 1e-5$  e  $\|grad\| \leq 1e-7$ .

O comportamento do processo instável usando o método PIPD com as variáveis de parada sintonizadas em  $\mu \leq 1e-5$  e  $\|grad\| \leq 1$  é ilustrado na figura (4.4). O processo instável apresenta resultados semelhantes quando o controlador GPC usa o método de otimização PICP sintonizado em  $\mu \leq 1e-5$  e  $\|grad\| \leq 1$  e o método GPR sintonizado em  $\text{grad}J_{GPC} \leq 1$ .

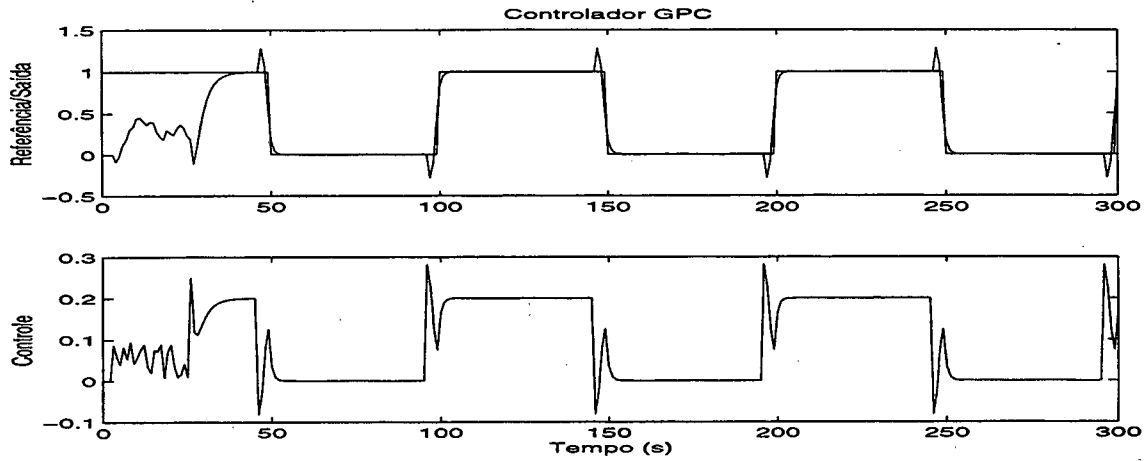


Figura 4.1: Comportamento do processo de fase não-mínima em relação as variáveis de parada ( $\mu \leq 1e-5$  e  $\|grad\| \leq 1e-7$ )

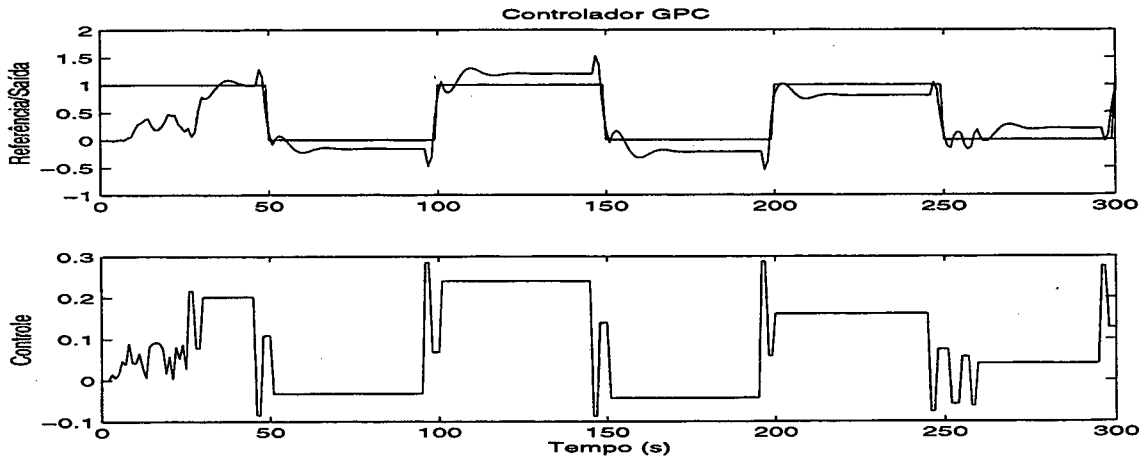


Figura 4.2: Comportamento do processo de fase não-mínima em relação as variáveis de parada ( $\mu \leq 1e-5$  e  $\|grad\| \leq 1$ )

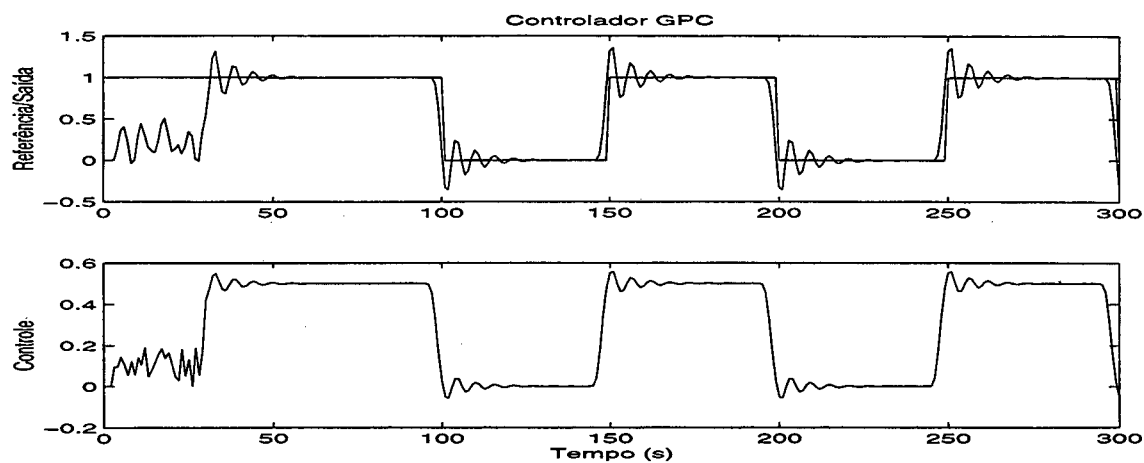


Figura 4.3: Comportamento do processo instável em relação as variáveis de parada ( $\mu \leq 1e-5$  e  $\|grad\| \leq 1e-5$ )

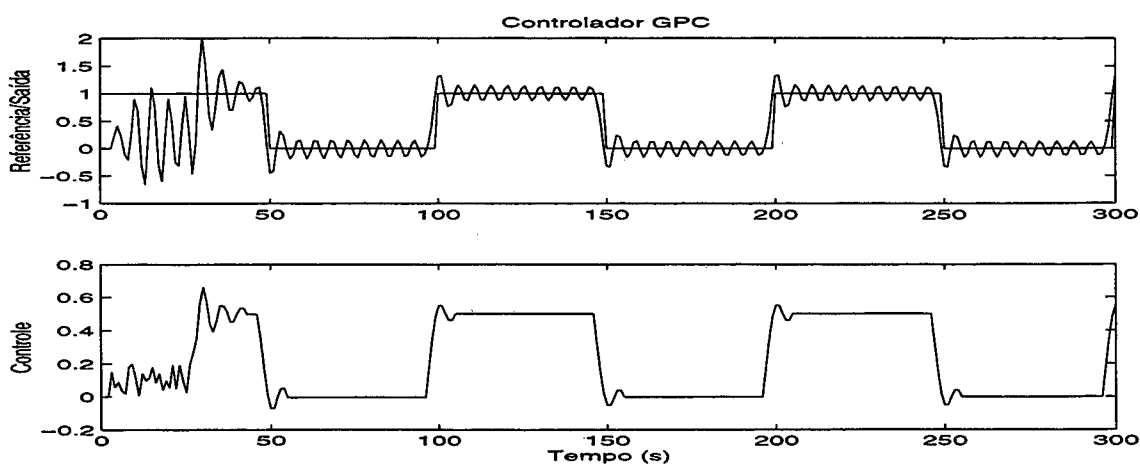


Figura 4.4: Comportamento do processo instável em relação as variáveis de parada ( $\mu \leq 1e-5$  e  $\|grad\| \leq 1$ )

Pode ser observado que quando as variáveis de parada dos métodos de otimização assumem valores elevados, o desempenho dos sistemas é prejudicado. Tanto no caso do processo instável quanto no processo de fase não-mínima o tempo médio de execução do processo de otimização é menor quando as variáveis de parada são aumentadas, como mostra a tabela (4.8). Porém, o desempenho do sistema é deteriorado na forma de um aumento nas oscilações da saída para o processo instável e no caso do processo de fase não-mínima a saída fica sujeita a oscilações e apresenta erro em regime (“*off-set*”), como ilustram as figuras (4.4) e (4.2).

Método de Otimização	Variáveis de Parada	Tempo Médio.(seg)
GPR	$grad J_{GPC} \leq 1e-5$	7,765
	$grad J_{GPC} \leq 0,1$	2,963
	$grad J_{GPC} \leq 1$	1,761
PIPD	$\mu \leq 1e-5$ e $\ grad\  \leq 1e-7$	0,509
	$\mu \leq 1e-5$ e $\ grad\  \leq 0.1$	0,283
	$\mu \leq 1e-5$ e $\ grad\  \leq 1$	0,248
PICP	$\mu \leq 1e-5$ e $\ grad\  \leq 1e-7$	0,735
	$\mu \leq 1e-5$ e $\ grad\  \leq 0.1$	0,339
	$\mu \leq 1e-5$ e $\ grad\  \leq 1$	0,393

Tabela 4.8: Influência das variáveis de parada no esforço computacional dos métodos de otimização

## 4.7 Conclusão

De maneira geral, o controle preditivo apresenta um melhor desempenho dinâmico com um horizonte de previsão elevado. Isto resulta em mais variáveis a serem otimizadas e, conseqüentemente, no problema de lentidão do algoritmo de otimização. A lentidão deve-se ao algoritmo de programação quadrática (QP) que constitui o núcleo central de otimização.

Neste capítulo apresentou-se três algoritmos de otimização para resolver o problema de programação quadrática e comparou-se o desempenho dos métodos de otimização do Gradiente Projetado de Rosen, Ponto Interior Primal Dual e Ponto Interior Corretor Predictor, com relação ao esforço computacional e quanto à influência das variáveis de parada dos métodos de otimização em plantas controladas pelo GPC.

Observou-se que o método GPR apresentou um maior esforço computacional quando comparado com os métodos PIPD e PICP e que o acréscimo de restrições ao sistema, por exemplo, na forma de um aumento no valor de  $N_2$ , têm maior influência no método GPR.

Por limitação do software MATLAB, que não oferece o recurso da matriz fatorada, não foi possível mostrar em termos de tempo de CPU que o algoritmo PICP é mais rápido do que o algoritmo PIPD. Porém o algoritmo PICP converge para o ponto ótimo com um número menor de iterações.

Através do estudo de simulações, observou-se um compromisso entre as variáveis de parada dos métodos de otimização e o desempenho do sistema controlado. Valores maiores para as variáveis de parada decresceram o tempo médio de execução do processo de otimização, porém, o desempenho do sistema fica prejudicado.

Foi mostrado também que a seleção do valor inicial do parâmetro barreira nos algoritmos de ponto interior afeta significativamente estes algoritmos de otimização, tornando-os mais lentos ou mais rápidos, ou ainda levando a uma solução não-factível e que o método de otimização PIPD é mais sensível ao valor inicial do parâmetro barreira.

Um aspecto ainda não muito explorado na técnica de Pontos Interiores diz respeito ao parâmetro especificado pelo usuário " $\beta$ " (é dessa forma que se encontra na literatura). Este parâmetro surge quando da determinação do parâmetro barreira ao final de cada iteração (ver equação 4.26). Em [24] preceitua-se que este valor deve ser superior a 1 (um) e em [26], sem maiores discussões, é adotado um valor igual a 10 (dez). Nos trabalhos [60],[61], este parâmetro não aparece pois existe uma proposta diferente para a atualização do parâmetro barreira " $\mu$ ". Portanto, uma maior compreensão da influência deste parâmetro " $\beta$ " relativamente ao processo iterativo e, de uma forma mais abrangente, ao próprio método de pontos interiores ainda se faz necessária nesta área, de modo a que se possa utilizar um valor mais próximo da realidade do problema, visando ter-se uma convergência e precisão mais adequada.



## Capítulo 5

# Redução do Espaço de Restrições

### 5.1 Introdução

Como visto no capítulo anterior existem vários algoritmos de otimização que resolvem o problema QP com um número finito de passos. Porém, um dos principais problemas associados a estas abordagens é o elevado tempo computacional requerido para a execução “on-line” dos algoritmos de otimização e o esforço computacional dos algoritmos de otimização depende significativamente da dimensão da matriz de restrições. O número de restrições do problema de otimização é função dos parâmetros de sintonia do controlador GPC, e totaliza  $4 \times N_u + 2 \times (N_2 - N_1 + 1)$  quando, por exemplo, existem restrições na variação e amplitude do sinal de controle e restrições na amplitude do sinal de saída.

Somente as restrições que limitam a região factível do espaço solução precisam ser consideradas. Logo a eficiência dos algoritmos de otimização pode ser aumentada se as restrições redundantes, que são aquelas que não limitam a região factível, são eliminadas [25].

Neste contexto este capítulo apresenta uma estratégia para a eliminação de restrições redundantes, reduzindo assim a dimensão da matriz de restrições, com o objetivo de diminuir o esforço computacional dos algoritmos de otimização apresentados.

### 5.2 Estratégia para a Eliminação de Restrições Redundantes

É possível a determinação do conjunto mínimo de restrições que formam a região factível do espaço solução  $[\Delta u(t) \times \Delta u(t+1) \times \dots \times \Delta u(t+N_u)]$ , porém os algoritmos para este procedimento requerem, geralmente, maior esforço computacional do que a redução

obtida pela diminuição do conjunto de restrições. Entretanto, a estratégia apresentada nesta seção assume que existam pelo menos restrições que afetam somente uma variável, por exemplo restrições na variação do sinal de controle ou restrições na amplitude do sinal de controle.

Cada restrição (ou linha da inequação  $P\Delta u \leq q$ ) divide o espaço solução do problema quadrático em dois subespaços, um de pontos factíveis e outro não. O procedimento descrito a seguir divide-se em dois passos:

- (1) Para as restrições que afetam somente um elemento do vetor " $\Delta u$ ", a linha divisória é paralela aos eixos do espaço solução. Portanto é possível reduzir este conjunto de restrições a um subespaço que representa o menor (hiper) paralelogramo factível.

Exemplo: restrições na variação do sinal de controle.

$$\begin{bmatrix} p_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_{i2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \Delta u \leq \begin{bmatrix} q_{i1} \\ q_{i2} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \Delta u \leq \begin{bmatrix} q_{\max 1} \\ q_{\min 1} \\ q_{\max 2} \\ q_{\min 2} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

sendo que:

$$\begin{aligned} q_{\min 1} &= \min(q_{i1}/p_{i1}) \text{ para } p_{i1} < 0 \\ q_{\max 1} &= \min(q_{i1}/p_{i1}) \text{ para } p_{i1} > 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} q_{\min 2} &= \min(q_{i2}/p_{i2}) \text{ para } p_{i2} < 0 \\ q_{\max 2} &= \min(q_{i2}/p_{i2}) \text{ para } p_{i2} > 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Com este procedimento obtém-se um politopo mínimo no espaço solução do problema que afeta somente uma variável, como ilustra a figura (5.1).

- (2) Cada restrição restante é oblíqua em relação a este politopo e divide este espaço em dois subespaços, um de solução factível e outro não-factível. Se o politopo mínimo definido anteriormente estiver totalmente contido no subespaço de soluções factíveis, então a restrição considerada é redundante e pode ser eliminada. Isto é feito verificando os vértices do politopo mínimo em relação a restrição considerada.

O conjunto de restrições assim obtido pode não ser o menor conjunto possível que represente a região factível inicial, outras reduções podem ser encontradas, mas isto exige mais cálculos e um algoritmo mais complexo. Logo a estratégia de eliminação de restrições redundantes representa um compromisso quando se considera o esforço total de cálculo, isto é, o esforço da estratégia de eliminação de restrições redundantes mais o esforço do método de otimização.

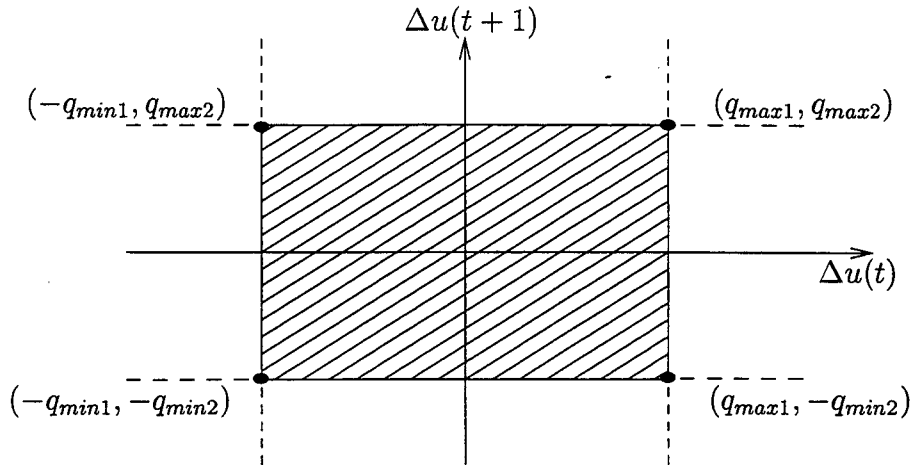


Figura 5.1: Politopo mínimo

**Exemplo 5.1** - Seja o processo (4.47), com restrições na variação e na amplitude do sinal de controle dados por:  $-0.04 \leq \Delta u(t) \leq 0.04$  e  $0 \leq u(t) \leq 0.2$ , e restrições na amplitude do sinal de saída dadas por:  $-0.01 \leq y(t) \leq 1.001$ . Os horizontes do controlador são  $N_1 = 1, N_u = 2, N_2 = 5$  e  $\lambda = 0$ . No instante  $T_s = 102$ , os valores de  $H$ ,  $f$ ,  $P$  e  $q$  são obtidos. O número total de restrições é igual a  $4 \times N_u + 2 \times (N_2 - N_1 + 1) = 18$ , e a matriz de restrições, neste instante é dada por :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -0.5 & -1 \\ 0.95 & -0.5 \\ 2.7750 & 0.95 \\ 4.4975 & 2.7750 \\ 1 & 0 \\ 0.50 & 1 \\ -0.95 & 0.50 \\ -2.7750 & -0.95 \\ -4.4975 & -2.7750 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Delta u \leq \begin{bmatrix} 0.5084 \\ 0.3101 \\ 0.1652 \\ 0.0866 \\ 0.0702 \\ 0.5116 \\ 0.7099 \\ 0.8548 \\ 0.9334 \\ 0.9498 \\ 0.0400 \\ 0.0400 \\ 0.0400 \\ 0.0400 \\ 0.0539 \\ 0.0539 \\ 0.1461 \\ 0.1461 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Através do primeiro passo do método de redução de restrições redundantes obtém-se as quatro últimas restrições da equação (5.6). No segundo passo é incluída neste conjunto



as restrições que engloba totalmente o politopo considerado. Desta forma, o número de restrições diminui de 18 para 7 e o espaço de restrições resultante é dado por:

$$\begin{bmatrix} 2.7750 & 0.95 \\ 4.4975 & 2.7750 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Delta u \leq \begin{bmatrix} 0.0866 \\ 0.0702 \\ 0.0539 \\ 0.0400 \\ 0.0400 \\ 0.0400 \\ 0.0400 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Foi observado durante os estudos de simulação que a estratégia de eliminação de restrições redundantes é menos eficiente em duas situações; para valores de  $N_2$  pequenos, pois o número de restrições redundantes eliminadas é pequeno, não compensando em termos de tempo total de execução e, quando o processo entra em regime, pois nestes instantes as restrições são severas e o número de restrições redundantes eliminadas diminui, não compensando em termos de tempo total de execução (esforço da estratégia de eliminação de restrições redundantes mais esforço do método de otimização).

Neste contexto é apresentado um procedimento, no qual a estratégia de eliminação de restrições redundantes é ativada somente nos intervalos onde ocorrem variações no sinal de referência, iniciando-se exatamente a  $(N_2)$  períodos de amostra antes de ocorrer a variação na referência. Isto por que o preditor no instante  $(t + N_2)$ , visualiza a variação da referência, e a estratégia é desativada antes que o processo entre em regime. A figura (5.2) ilustra tal procedimento.

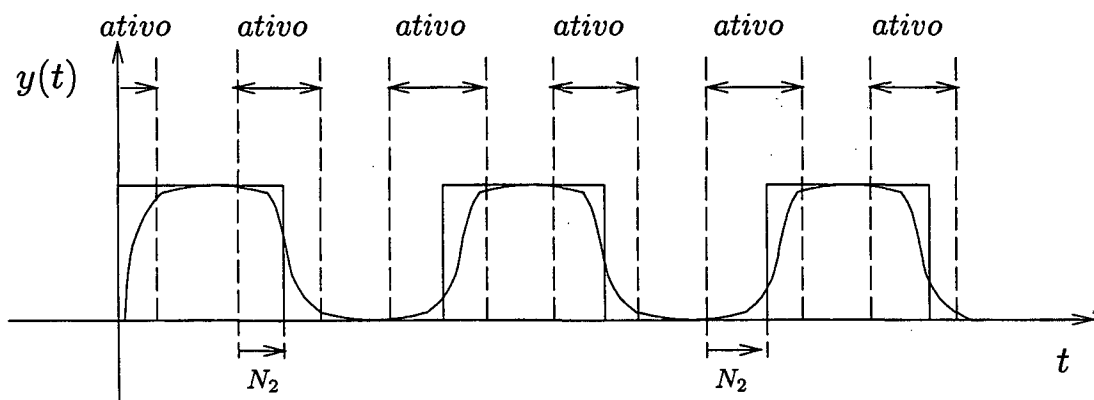


Figura 5.2: Procedimento para ativação da estratégia de eliminação de restrições

As tabelas (5.1), (5.2) e (5.3) ilustram o esforço computacional dos métodos de otimização com e sem redução do número de restrições, utilizando o exemplo anterior.

GPR	Redução do Espaço de Restrições	Tempo Médio/s
N2=5	Não utiliza nenhuma estratégia	2.6939
	Utilizando a estratégia de eliminação de restrições redundantes	2.9181
	Utilizando o procedimento proposto	2.6638
N2=10	Não utiliza nenhuma estratégia	4.4917
	Utilizando a estratégia de eliminação de restrições redundantes	4.5358
	Utilizando o procedimento proposto	3.9700

Tabela 5.1: Resultados comparativos da eliminação de restrições - GPR

PIPD	Redução do Espaço de Restrições	Tempo Médio/s
N2=5	Não utiliza nenhuma estratégia	0.2883
	Utilizando a estratégia de eliminação de restrições redundantes	0.3278
	Utilizando o procedimento proposto	0.2167
N2=10	Não utiliza nenhuma estratégia	0.8278
	Utilizando a estratégia de eliminação de restrições redundantes	0.5667
	Utilizando o procedimento proposto	0.4908

Tabela 5.2: Resultados comparativos da eliminação de restrições - PIPD

PICP	Redução do Espaço de Restrições	Tempo Médio/s
N2=5	Não utiliza nenhuma estratégia	0.4190
	Utilizando a estratégia de eliminação de restrições redundantes	0.3547
	Utilizando o procedimento proposto	0.2333
N2=10	Não utiliza nenhuma estratégia	1.3974
	Utilizando a estratégia de eliminação de restrições redundantes	0.6794
	Utilizando o procedimento proposto	0.6054

Tabela 5.3: Resultados comparativos da eliminação de restrições - PICP

## 5.3 Conclusão

Neste capítulo apresentou-se uma estratégia para a eliminação de restrições redundantes, assumindo que existam pelo menos restrições que afetam somente uma variável. Analisou-se a eficiência da estratégia de eliminação de restrição para os três métodos de otimização, lembrando que para o método de pontos interiores a estratégia foi avaliada para o caso do sistema linear completo.

Observou-se que a estratégia de eliminação de restrições redundantes é menos eficiente em duas situações :

- para valores pequenos de  $N_2$
- quando o processo entra em regime

O procedimento apresentado para melhorar a eficiência da estratégia de eliminação de restrições redundantes foi implementada com sucesso, como é visto nas tabelas (5.1), (5.2), (5.3), justificando sua utilização.

Observou-se ainda que os ganhos obtidos no esforço computacional para os métodos de Ponto Interior são maiores que do método do Gradiente Projetado de Rosen, sendo que entre os métodos de pontos interiores o algoritmo de otimização PICP mostrou-se mais eficiente em termos de tempo computacional na presença da estratégia de eliminação de restrições. Porém, mesmo no GPR são obtidos ganhos significativos, quando utilizam-se valores maiores para  $N_2$ , que justificam a utilização da estratégia de redução do número de restrições.



## Capítulo 6

# Conclusões e Sugestões para Estudos Futuros

### 6.1 Conclusões

Esta dissertação apresentou um estudo sobre o comportamento do Controlador Preditivo Generalizado (GPC) sujeito à restrições lineares na amplitude do sinal de controle e saída, na variação do sinal de controle e no sobre-sinal, sendo que o problema de controle é formulado como um problema de programação quadrática. Avaliou-se o comportamento do GPC quando sujeito a diferentes métodos de otimização, onde apresentou-se o Método de Otimização de Pontos Interiores que de forma simples e eficiente agrega as restrições no processo de otimização. O estudo do Método de Pontos Interiores mostrou-se eficiente em termos de convergência e do tempo computacional em relação aos algoritmos apresentados na literatura [9],[33],[58]. Com isso, um número maior de plantas com dinâmicas mais rápidas podem ser controladas pelo GPC, justificando a utilização e a continuação dos estudos sobre os algoritmos de Pontos Interiores para resolver os problemas de controle de maneira mais eficiente.

Apresentou-se ainda uma proposta para melhorar o tempo computacional requerido para a execução “on-line” dos algoritmos de otimização apresentados no trabalho através da estratégia de eliminação de restrições redundantes. A seguir, apresentam-se os principais resultados obtidos no trabalho :

- Em razão de que na maioria das situações práticas o desempenho de controle alcançado é limitado pelas restrições do sistema controlado, é evidente que a inclusão de restrições no cálculo da lei de controle mostra-se mais realista do que os métodos padrões de controle que não levam em conta as restrições do processo.
- A determinação do controle ótimo no Controlador Preditivo Generalizado pode ser alcançado a partir de técnicas de otimização que consideram no processo de otimização

as restrições da planta, obtendo-se assim, um controle mais flexível sobre as variáveis do processo e alcançando resultados melhores e mais realistas.

- Como mostrado na literatura, as restrições podem ser usadas como sintonia para melhorar o desempenho de diferentes tipos de processos. O uso de restrições no incremento do controle apresenta um controle mais suave, resultando em uma resposta mais lenta. Observou-se que as restrições podem melhorar o comportamento em malha fechada para sistemas de fase não-mínima e sistemas oscilatórios. No caso do sistema oscilatório foram apresentadas duas estratégias para tratar o problema do sobre-sinal, sendo que na primeira estratégia a máxima oscilação é especificada, mas deve-se conhecer os valores futuros do sinal de referência. Na segunda estratégia não é preciso conhecer os valores futuros do sinal de referência, mas a estratégia apresentou uma difícil tarefa para especificar um adequado valor absoluto máximo da derivada da saída.

- Os métodos de otimização apresentados no trabalho apresentaram uma ótima convergência numérica, porém os Métodos de Pontos Interiores mostraram-se mais eficientes em termos de tempo de processamento do algoritmo de otimização. Observou-se que o método GPR além de apresentar maior esforço computacional é mais sensível ao acréscimo de restrições ao sistema, por exemplo na forma de um aumento no valor do horizonte de previsão máximo da saída  $N_2$ . O algoritmo PICP apresentou uma convergência melhor com relação ao número de iterações do que o algoritmo PIPD. Isto por que o parâmetro barreira no método PICP é estimado dinamicamente a cada iteração, tornando-se assim menos dependente da inicialização do parâmetro barreira inicial.

- A seleção do valor inicial do parâmetro barreira nos algoritmos de pontos interiores pode afetar de maneira crítica o desempenho destes algoritmos, tornando-os mais lentos, aumentando o número de iterações ou até mesmo fazer o processo iterativo não alcançar a convergência.

- Um resultado importante analisado neste trabalho é que a utilização do sistema reduzido sugerido por Granville [24] a cada iteração, mostra-se mais rápido em termos de tempo computacional para os dois métodos de pontos interiores apresentados e com a vantagem de que a matriz do sistema linear " $E_{sist}$ " é melhor condicionada numericamente. Observa-se ainda que o condicionamento da matriz " $E_{sist}$ " no método PICP utilizando a matriz reduzida é mais sensível a variação do parâmetro barreira inicial e que o condicionamento da mesma pode variar bruscamente para diferentes valores de " $\mu$ ", mas ainda se mantendo melhor condicionada do que a matriz completa. Embora em trabalhos de sistemas de potência, como o da "Análise do Máximo Carregamento do Sistemas de Potência via Métodos de Pontos Interiores", onde a utilização dos métodos de pontos interiores se faz há algum tempo, mostra-se que a matriz do sistema linear é mal condicionada para o método do sistema reduzido. Isto deve-se ao fato de que em sistemas de potência a matriz Jacobiana referente às restrições de igualdade é singular no limite do máximo carregamento de demanda no sistema, o que reflete no mal condicionamento numérico da matriz do sistema linear.

- Através do estudo de simulações, observou-se o compromisso entre as variáveis de

parada dos métodos de otimização e o desempenho do sistema controlado, onde para valores maiores para as variáveis de parada diminui o tempo médio de execução do processo de otimização, porém, o desempenho do sistema fica prejudicado.

- A estratégia de eliminação de restrições redundantes com o objetivo de melhorar o esforço computacional nos algoritmos de otimização mostrou-se menos eficiente para valores menores do horizonte de previsão máximo  $N_2$  e quando o processo entra em regime. O procedimento apresentado para superar estas limitações foi implementado com eficiência. Observou-se ainda que os ganhos no esforço computacional para os métodos de Pontos Interiores são maiores do que no método do Gradiente Projetado de Rosen.

## 6.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Durante o decorrer do trabalho surgiram algumas dúvidas que podem ser fontes de pesquisas futuras no sentido de dar continuidade no trabalho aqui iniciado, proporcionando assim um desempenho maior nos algoritmos de controle preditivos. A seguir, são dadas algumas sugestões para trabalhos futuros.

- Estudar uma maneira de especificar o valor absoluto máximo da derivada da saída para se alcançar o valor desejado do sobre-sinal.

- Estudar mais detalhadamente a influência dos parâmetros " $\mu$ " e do parâmetro " $\beta$ " sobre o processo de convergência dos métodos de otimização de pontos interiores, propondo uma estratégia adequada para a sua inicialização, com o objetivo de garantir a convergência mais rápida.

- Estudar outras maneiras de resolver o sistema linear em cada iteração nos métodos de pontos interiores, pois estes consomem a maior parte do tempo nos processos de otimização.

- Softwares tais como Matlab e Matrix tem conteúdos que refletem os avanços tecnológicos até o meio da década 1970. Estes pacotes são extremamente bem projetados para analisar problemas definidos no espaço de estados, pois a análise é feita através de matrizes e vetores, mas são inerentemente limitados para incorporar métodos que têm surgidos nos últimos 15 anos. Desde 1980, avanços matemáticos na abordagem frequencial estenderam os métodos SISO para o caso MIMO e abriram a janela para o surgimento explosivo dos estudos de sistemas MIMO no domínio da frequência. Foi descoberto que problemas de robustez (desempenho na presença de incerteza) são naturalmente propostos e resolvidos no domínio da frequência. Matlab e outros softwares semelhantes são incapazes de tirar vantagem destes desenvolvimentos recentes. Por que ? Porque a única estrutura de dados disponível no Matlab é a matriz numérica. Uma descrição de um sistema multivariável requer uma representação de uma matriz de funções de transferência, que está fora do alcance de um programa deste tipo. Assim um desafio de pesquisa

seria o projeto de novas ferramentas computacionais que permitam tirar vantagens do desenvolvimento mais recentes da área de controle.

- De posse das ferramentas para análise, projeto e simulação, um estudo de importância prática é o estudo de sistemas dinâmicos multivariáveis, pois o trabalho apresentado se restringiu ao caso de sistemas SISO, onde pode-se avaliar o comportamento do algoritmo GPC QP via Métodos de Pontos Interiores em um sistema de grande porte.





# Bibliografia

- [1] Åström, K. J. and Wittenmark, B. "Adaptive Control". *Addison-Wesley*, Reading, Massachusetts, second edition, 1995.
- [2] Åström, K. J. and Wittenmark, B. "On Self-Tuning Regulators". *Automatica*, 9 (2), pag. 185/199, 1973.
- [3] Åström, K. J. and Wittenmark, B. "Self-Tuning Controllers-Design Principles and Applications". *Applications of Adaptive Control, Narendra and Monopoli*, 1980.
- [4] Åström, K. J. "Adaptive Feedback Control". *Proc. IEEE*, 75 (185), 1987.
- [5] Bazaraa, M. S.; Sherali, H. D. and Shetty C. M. "Nonlinear Programming: Theory and Algorithms". *Wiley-Interscience*, 1979.
- [6] Bitmead, R. R.; Gevers, M. and Wertz, V. "Adaptive Optimal Control: The Thinking Man's GPC". *Prentice-Hall, Inc.*, 1990.
- [7] Bruijn, P.; Verbruggen, H. and Appeldoorn, P. "Predictive Control: A Comparison and Simple Implementation". *Proc. of IFAC Conference on Low Cost Automation*, Valencia, Espanha, 1986.
- [8] Camacho, E. F. and Bordons, C. "Model Predictive Control in the Process Industry". *Springer-Verlage*, 1995.
- [9] Camacho, E. F. "Constrained Generalized Predictive Control". *IEEE Trans. Aut. Control*, 38, pag. 327/332, 1993.
- [10] Chen, S. C.; Snyder, R. M. and Wilhelm, R. G. "Adaptive Profile Control for Sheetmaking Processes". *Proc. 6th Internat. IFAC/IFIP/IMEKO PRP-6 conf.*, Ohio, 1986.
- [11] Clarke, D. W. and Gawthrop, P. J. "Self-Tuning Controller". *Proc. IEE*, 122 (9), pag. 929/934, 1975.
- [12] Clarke, D. W. and Gawthrop, P. J. "Self-Tuning Controller". *Proc. IEE*, 126 (6), pag. 633/640, 1979.

- [13] Clarke, D. W. "Self-Tuning Control the Nonminimum-Phase Systems". *Automatica*, 20 (5), pag. 501/517, 1984.
- [14] Clarke, D. W.; Mohtadi, C. and Tuffs, P. S. "Generalized Predictive Control- Part 1- The Basic Algorithm; Part 2- Extensions and Interpretations". *Automatica*, 23 (2), pag. 137/160, 1987.
- [15] Clarke, D. W.; Mohtadi, C. "Properties of Generalized Control". *Automatica*, 25 (6), pag. 859/875, 1989.
- [16] Clarke, D. W.; Tuffs, P. S. and Mohtadi, C. "Generalized Predictive Control of a Difficult Process". *7th IFAC Symp. on Ident. and System Parameter Estimation*, New York, 1985.
- [17] Coelho, A. A. R.; Amaral, W. C.; Yamakami, A. and Gomes, F. J. "Controle Preditivo Generalizado: Aspectos Teóricos e Implementação". *Anais do 8<sup>o</sup> CBA*, Belém-Pa, pag. 32/37, 1990.
- [18] Cutler, C. R. and Ramaker, B. C. "Dynamic Matrix Control- A Computer Control Algorithm". *Proc. of JACC*, San Francisco, U.S.A, 1980.
- [19] Crisalle, O. D.; Seborg, D. E. and Mellichamp, D. A. "Theoretical Analysis of Long-Range Predictive Controllers". *Proc. of ACC Pittsburg*, vol. 1, pag 570/576, Jun., 1990.
- [20] De Keyser, R. M.; Van de Veld, Ph. A. and Dumortier, F. "A Comparative Study of Self-Adaptive Long-Range Predictive Control Methods". *Automatica*, 24 (2), pag. 149/163, 1988.
- [21] Favier, G.; Dubois, D. and Rougerie, C. "On Predictive Control: A Comparison and Some Extensions". *Int. INRIA Conf. on Analysis and Optimization of Systems*, Juan Les Pins, France, pag. 789/809, May., 1989.
- [22] Fletcher, R. "Practical Methods of Optimization". *John Wiley and Sons*, 1990.
- [23] Fiacco, A. V. and McCormick. "Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques". *John Wiley and Sons*, New York, 1968.
- [24] Granville, S. "Optimal Reactive Dispatch through Interior Point Methods". *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 9, N. 1, pag. 136/146, 1994.
- [25] Gustavo, H. C. O.; Rubén M. N.; Wagner, C. A. e Luiz, G. L. "Análise de Restrições em Sistemas com Controle Preditivo". DCA/FEE/UNICAMP, 1993.
- [26] Irisarri, G. D.; Wang, X.; Tong, J. and Mokhtari, S. "Maximum Loadability of Power Systems Using Interior Point Non-Linear Optimization Method". Paper 96 WM 207-1 PWRs, 1996.
- [27] Karmarkar, N. "A New Polynomial Time Algorithm for Linear Programming". *Combinatorica* 4, pag 373/395, 1984.

- [28] Kojima, M.; Mizuno and Yoshise, A. "A Primal-Dual Interior Point Algorithm for Linear Programming". in *Progress in Mathematical Programming: Interior Point and Related Methods*, (ed) Megiddo, N., Springer Verlag, New York, pag. 29/47, 1989.
- [29] Kramer, K. and Unbehauen, H. "Predictive Adaptive Control: Comparison of Main Algorithms". *Proc. of European Control Conference*, Grenoble, France, pag. 327/332, 1991.
- [30] Lambert, M. "Adaptive Control of Flexible Systems". *D. Phil. Thesis- University of Oxford*, Engl., 1987.
- [31] Laslon, L. S. "Optimization Theory for Large Systems". *MacMillan Publishing Co.*, London, 1970.
- [32] Lawson, C. L. and Hanson R. J. "Solving Least-Squares Problems". *Prentice-Hall, Englewood Cliffs*, New Jersey.
- [33] Lemke, C. E. "On Complimentary Pivot Theory". In *Dantzig, G. B. and Velnott, A. F. (Eds), Mathematics of the Decision Sciences*.
- [34] Lemos, J. M. and Mosca, E. "A Multipredictor- Based LQ Self-Tuning Controller". *Proc. of 7th IFAC Symp. on Identification and System Parameter Estimation*, pag. 137/141, 1985.
- [35] Lim, K. W. and Ling, K. V. "Generalized Predictive Control of a Heat Exchanger". *Proc. IEEE Control Systems Magazine*, pag. 9/12, 1989.
- [36] Luenberger, D. G. "Linear and Nonlinear Programming". *Addison-Wesley*, New York, 1984.
- [37] Lustig, I. J.; Marsten, R. E. and Shano, D. F. "Interior Point Methods for Linear Programming: Computational State of the Art.". *ORSA Journal on Computing*, 6 (1), 1994.
- [38] Marstens, R. et al. "Interior Point Methods for Linear Programming: Just call Newton, Lagrange, Fiacco and McCormick". *Interfaces* 20:4, pag. 105/116, 1990.
- [39] McIntosh, A. R., Shah, S. L. and Fisher, D. G. "Selection of Tuning Parameters for Adaptive Generalized Predictive Control". *Proc. of ACC*, vol. 2, pag. 1846/1851, 1989.
- [40] McIntosh, A. R., Shah, S. L. and Fisher, D. G. "Analysis and Tuning of Adaptive Generalized Predictive Control". *Can. J. of Ch. Eng*, 69, pag. 97/110, 1991.
- [41] Mehrotra, S. "On the Implementation of a Primal Dual Interior Point Method". *SIAM Journal on Optimization*, pag. 575/601, 1992.
- [42] Menga, G. and Mosca, E. "Musmar: A New Class of Multivariable Adaptive Regulators". *Proc. of IFAC Symp. on Identification and System Parameter Estimation*, Darmstadt, Alemanha, 1979.

- [43] Mohtadi, C. "Studies in Advanced Self-Tuning Algorithms". *D. Phil. Thesis- University of Oxford*, Ingl., 1986.
- [44] Mohtadi, C. and Clarke, D. W. "Generalized Predictive Control, LQ, or Pole Placement: A Unified Approach". *Proc. of 25th CDC*, Athens, Greece, Dec., 1986.
- [45] Mohtadi, C. "Advanced Self-Tuning Algorithms D.Phil thesis". *University of Oxford*, 1987.
- [46] Mutha, K. R. "Constrained Long Range Predictive Control". *These de Master of Science in Process Control-Department of Chemical Engineering, University of Alberta Library*, 1990.
- [47] Nazetta, R. "Um Sistema Baseado em Conhecimento para configuração e Supervisão de Algoritmos de Controle Adaptativo". *Tese de Mestrado - DCA/FEE/UNICAMP*, 1991.
- [48] Pang, J. S. "Methods for Quadratic Programming : A Survey". *Computers and Chemical Eng.* vol. 7, (5) pag. 583/594, 1987.
- [49] Peterka, V. "Predictor Based Self-Tuning Control". *Proc. of 6th IFAC Symp. on Identification and System Parameter Estimation*, pag. 873/878, 1985.
- [50] Pranob Banerjee and Sirish, L. Shah. "Tuning Guidelines for Robust Generalized Predictive Control". *Proc. 31th Conf. on Decision and Control IEEE*, pag. 3233/3234, 1992.
- [51] Richalet, J.; Rault, A.; Testud, J. L. and Papon, J. "Model Predictive Heuristic Control: Applications to Industrial Process". *Automatica*, 14 (5), pag. 413/428, 1978.
- [52] Robert, N.; Schmidt, P. E. and Mohammad Modarreszadeh. "A Case for the Adaptive Predictive Multiloop Controller". *Instrumentation and Control Systems*, pag. 59/63, 1995.
- [53] Salgado, R. "Otimização Estática Aplicada a Sistemas de Potência". Notas de aula do curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina, 1995.
- [54] Samaan, M. "Synthese et Supervision des Lois de Commande Adaptive". *These de Doctorat - Institut National Polytechnique de Grenoble*, França, 1989.
- [55] Smith, O. J. M. "Closer Control of Loops with Dead Time". *Chem. Eng. Prog.*, 33 (12), pag. 217/219, 1957.
- [56] Soeterboek. "Predictive Control: A Unified Approach". *These de Doctorat- Technische Universiteit Delft*, Holanda, 1990.
- [57] Sun, D. J.; Brewer, B.; Hughes and Tinney W. F. "Optimal Power Flow by Newton's Method". *IEEE Trans. on PAS*, vol. 103, pag. 2864/2880, 1984.

- [58] Tsang, T. T. C. and Clarke, D. W. "Generalized Predictive Control With Input Constraints". *Proc. IEE*, 135 D, Pt. D, pag. 451/460, 1988.
- [59] Wellstead, P. E.; Edmunds, J. M. P.; Prager, D. and Zanker, P. "Self-Tuning Pole/Zero Assignment Regulators". *Int. J. Control*, 30 (1), pag. 1/26, 1979.
- [60] Wu, Y.; Debs, A. S. and Marsten, R. E. "A Nonlinear Programming Approach Based on an Interior Point Method for Optimal Power Flows". *IEEE/NTUA*, Paper APT 409-17-27, 1993.
- [61] Wu, Y.; Debs, A. S. and Marsten, R. E. "A Direct Nonlinear Predictor Corretor Primal Dual Interior Point Algorithm for Optimal Power Flows". *IEEE T-PWRS* 9 (2), 1994.
- [62] Ydstie, B. E. "Extended Horizon Adaptive Control". *Proc. of 9th IFAC World Congress*, Budapest, Hungary, 1984.

# Apêndice A

## Interpretação Geométrica do GPC com Restrições

### A.1 Introdução

Este apêndice apresenta as interpretações geométricas da função objetivo do GPC, das restrições e da solução ótima da função custo do controlador, para o caso GPC SISO com horizonte de controle  $N_u = 2$ . Contudo, muitas das discussões são também válidas para o GPC MIMO, para um sistema  $(2 \times 2)$  com  $N_u = 1$ , enquanto  $\Delta u(t)$  e  $\Delta u(t + 1)$  são substituídos por  $\Delta u_1(t)$  e  $\Delta u_2(t)$ .

A subseção 3.1.1 descreve a forma geométrica da função custo do GPC, a subseção 3.1.2 descreve a forma geométrica da região factível para as restrições na variação, amplitude e variação mais amplitude da variável manipulada, e na subseção 3.1.3 é dada a interpretação geométrica da solução ótima do GPC restrito.

#### A.1.1 Forma Geométrica da Função Custo do GPC

Considere a equação :

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + d = 0 \quad (\text{A.1})$$

Isto também pode ser reescrito como :

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T + d = 0 \quad (\text{A.2})$$

onde

$$H = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

A equação (A.2) representa uma elipse centrada na origem se os autovalores da matriz  $H$  e a constante  $d$  são de mesmo sinal. A função custo do GPC é definida pela equação (2.26) como :

$$J(u, t) = \tilde{u}^T [G^T G + \lambda I] \tilde{u} + 2 [f - w]^T G \tilde{u} + [f - w]^T [f - w] \quad (\text{A.4})$$

onde  $\tilde{u} = [\Delta u(t) \ \Delta u(t+1)]^T$  para  $N_u = 2$ . Submetendo esta equação a mudança de coordenadas, é possível escrever a equação em uma forma similar a equação (A.2). A matriz  $(G^T G + \lambda I)$  é similar a matriz  $H$  da equação (A.2).  $(G^T G + \lambda I)$  é uma matriz definida positiva e consequentemente todos seus autovalores são positivos. Para valores positivos diferentes do  $J_{GPC}$ , a função custo do GPC representa o lugar das elipses no plano  $\Delta u(t) \times \Delta u(t+1)$ . O objetivo do problema de otimização não restrito é de encontrar a menor elipse que satisfaz a função custo.

Os autovalores e autovetores de  $(G^T G + \lambda I)$  indicam o comprimento do maior e menor eixo e sua orientação no plano  $\Delta u(t) \times \Delta u(t+1)$ , respectivamente. Assim, a razão da raiz quadrada do maior para o menor autovalor, que é também o número de condição da matriz, indica se a elipse é alongada ou circular.

### A.1.2 Forma Geométrica da Região Factível

A região que satisfaz todas as restrições é definida como a região factível. A região factível para restrições na variação, restrições de amplitude e restrições de variação mais amplitude da variável manipulada podem ser mostradas graficamente no plano  $\Delta u(t) \times \Delta u(t+1)$ , para  $N_u = 2$ . As formas geométricas das diferentes restrições são ilustradas a seguir :

- Restrições de variação

As restrições de variação em  $\tilde{u}$  pode ser representada como :

$$\begin{aligned} \Delta u_{1min} &\leq \Delta u(t) \leq \Delta u_{1max} \\ \Delta u_{2min} &\leq \Delta u(t+1) \leq \Delta u_{2max} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

No plano  $\Delta u(t) \times \Delta u(t+1)$ , as restrições formam uma região factível retangular. Para um dado valor de restrição de variação, o tamanho da região factível retangular não muda com o tempo. A região factível para restrições de variação é ilustrada na figura (A.1).



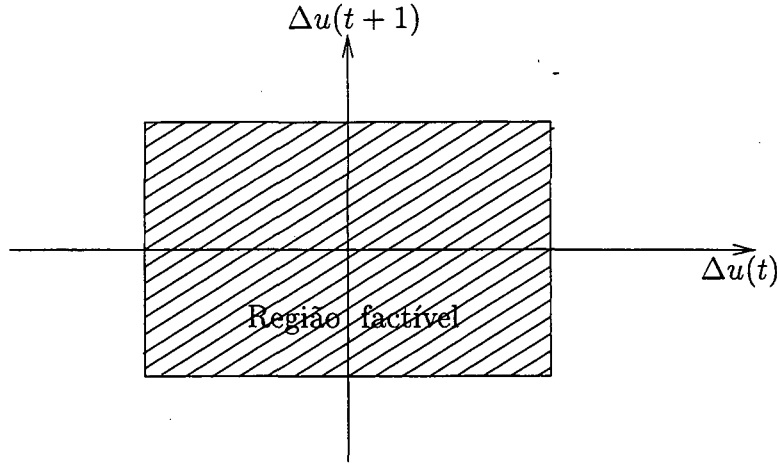


Figura A.1: Região factível das restrições de variação

- Restrições de amplitude

Mostra-se no capítulo 4 que as restrições de amplitude na variável manipulada podem ser representadas como restrições em  $\tilde{u}$ , como a seguir :

$$\begin{aligned} u_{1min} &\leq u(t) \leq u_{1max} \\ u_{2min} &\leq u(t+1) \leq u_{2max} \end{aligned} \tag{A.6}$$

que podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\leq \Delta u(t) \leq \beta_1 \\ \alpha_2 &\leq \Delta u(t) + \Delta u(t+1) \leq \beta_2 \end{aligned} \tag{A.7}$$

onde :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= u_{1min} - u(t-1) \\ \beta_1 &= u_{1max} - u(t-1) \\ \alpha_2 &= u_{2min} - u(t-1) \\ \beta_2 &= u_{2max} - u(t-1) \end{aligned}$$

A região factível das restrições de amplitude da equação (A.7) representa um paralelogramo no plano  $\Delta u(t) \times \Delta u(t+1)$ , como mostra a figura (A.2). Para um dado valor de restrições de amplitude, o tamanho da região factível pode variar a cada instante de amostra porque cada  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  para  $i=1,2$  é função de  $u(t-1)$ . Por causa desta propriedade das restrições de amplitude, a solução do GPC restrito na amplitude não é trivial. Consequentemente, a forma da região factível é sempre um paralelogramo.

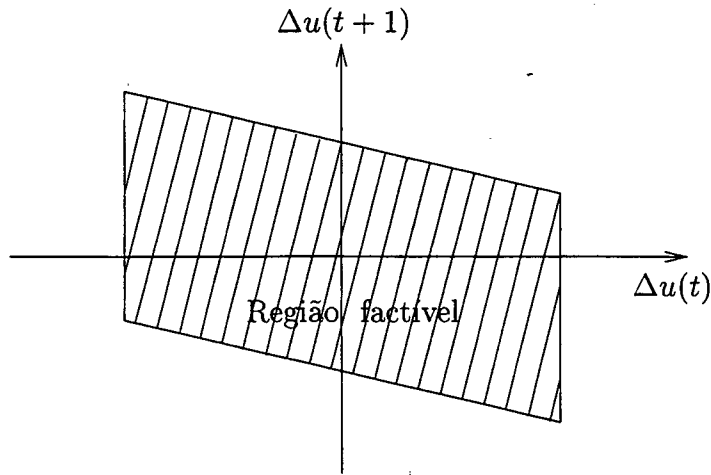


Figura A.2: Região factível das restrições de amplitude

- Restrições de variação e amplitude

As restrições de variação da equação (A.5) e as restrições de amplitude (A.6), podem ser reescritas como :

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &\leq \Delta u(t) \leq \beta_1 \\
 \alpha_2 &\leq \Delta u(t+1) \leq \beta_2 \\
 \alpha_3 &\leq \Delta u(t) \leq \beta_3 \\
 \alpha_4 &\leq \Delta u(t) + \Delta u(t+1) \leq \beta_4
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

onde :

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \Delta u_{1min} \\
 \beta_1 &= \Delta u_{1max} \\
 \alpha_2 &= \Delta u_{2min} \\
 \beta_2 &= \Delta u_{2max} \\
 \alpha_3 &= u_{1min} - u(t-1) \\
 \beta_3 &= u_{1max} - u(t-1) \\
 \alpha_4 &= u_{2min} - u(t-1) \\
 \beta_4 &= u_{2max} - u(t-1)
 \end{aligned}$$

A região factível das restrições de variação mais amplitude da equação (A.8) é representada pela interseção do retângulo e o paralelogramo, como é mostrado na figura (A.3). Como mencionado anteriormente, o tamanho do paralelogramo pode variar a cada instante de amostra e, ao contrário das restrições de variação ou restrições de amplitude, a

geometria das restrições de variação mais amplitude não é fixada. A geometria da região factível neste caso pode ser um polígono de três a seis lados.

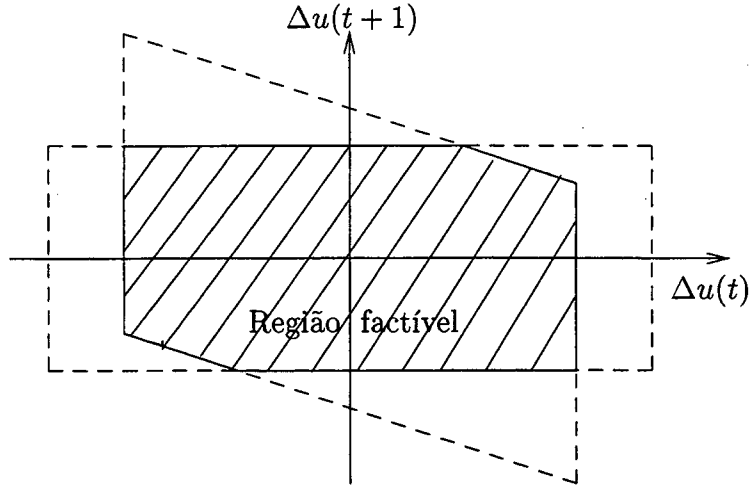


Figura A.3: Região factível das restrições de variação e amplitude

### A.1.3 Interpretação Geométrica da Solução Ótima

Nesta subsecção, uma explanação geométrica da solução ótima para a função custo restrita é apresentada.

O objetivo da função custo não restrita é encontrar  $\Delta u_1$  tal que o valor de  $J_{GPC}$  da equação (A.4) é mínimo. Geometricamente o objetivo é encontrar  $\Delta u_1$  tal que a elipse é de menor tamanho. Quando a função custo é sujeita a restrições, o objetivo, geometricamente falando, é encontrar  $\Delta u_2$  tal que a elipse é de menor tamanho e que a solução também pertença a região factível. Da figura (A.4) é visto que o ponto da elipse  $\Delta u_1$  é o menor custo possível, o custo da elipse J1 é menor do que o custo da elipse J2 e a elipse J2 é a menor elipse que têm um ponto  $\Delta u_2$  em comum com a região factível. A solução ótima da função custo irrestrita é  $\Delta u_1$  e da função custo restrita é  $\Delta u_2$ .

Se a solução ótima irrestrita fica na região factível, então ela também é a solução ótima para o problema restrito. Consequentemente, se a solução irrestrita fica fora da região factível, então a solução ótima está no limite da região factível.

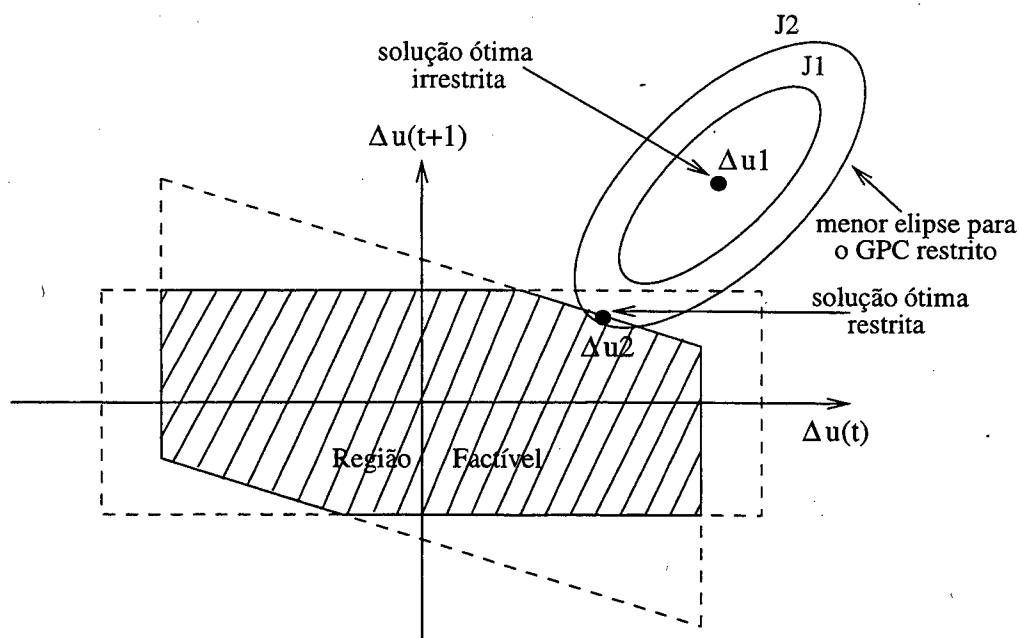


Figura A.4: Solução ótima da função custo restrita

## A.2 Conclusão

A função custo GPC pode ser geometricamente interpretada como uma equação no lugar das elipses, para  $N_u = 2$ , no plano  $\Delta u(t) \times \Delta u(t+1)$ . As restrições de variação e amplitude são representadas pela interseção do retângulo e o paralelogramo e, podem ter uma geometria de um polígono de três a seis lados, no plano  $\Delta u(t) \times \Delta u(t+1)$ . Se a solução do GPC irrestrita fica fora da região factível, então a solução do GPC restrito é o ponto de contato da menor elipse sobre a região factível, no plano  $\Delta u(t) \times \Delta u(t+1)$ .